

COMPATIBILIDAD EN SOLUCIONES GNSS APLICANDO CORRECCIÓN DIFERENCIAL VÍA RADIO Y NTRIP EN UNA RED URBANA EN COSTA RICA

Dr.-Ing. Jorge Moya Zamora^{1,*}, Ing. Kenneth Ovares Sánchez, M.Sc.^{1,†},
Ing. Hazel Espinoza Mora^{2,‡}, Ing. Jennifer López Flores^{3,§},
Ing. María Nikole Salazar Barrantes^{1,¶}, Ing. Efraín Menjívar Pérez, M.Sc.^{1,||}

¹Universidad Nacional, Costa Rica

²Rumbo Topografía

³Proceso de Supervisión de Alianzas Público-Privadas. JAPDEVA

Recibido: 19/marzo/2025

Aceptado: 22/mayo/2025

DOI: <https://doi.org/10.5377/ce.v16i1.20508>

RESUMEN

Se presentan los resultados obtenidos de la evaluación de la compatibilidad de las soluciones de coordenadas cartográficas y altura elipsoídica determinadas por medio de la aplicación de las metodologías de levantamiento GNSS (*Global Navigation Satellite Systems*) en las modalidades de corrección diferencial RTK (*Real Time Kinematic*) vía radio y por medio de internet vía NTRIP (*Networked Transport of RTCM via Internet Protocol*). Este último con una demanda que ha venido creciendo desde la puesta en marcha del servicio a inicio del año 2023. La metodología de levantamiento con corrección vía NTRIP implica realizar observaciones en tiempo de unos cuantos segundos; mientras que el uso de radio requiere de mayor tiempo de medición. Ambas, ofrecen soluciones adecuadas dentro de los parámetros de tolerancia establecidos por la legislación nacional. Se determinaron seis conjuntos de datos con las diferencias de coordenadas horizontales y vertical tomando las soluciones estáticas patrón. Se utilizó el lenguaje R como herramienta para la generación de los resultados. Estos reflejaron una consistencia entre el RTK vía radio en promedio de 1,3 cm en horizontal y -7 cm en vertical; mientras que para las soluciones NTRIP fue de 8 cm horizontalmente y 2 cm en vertical. Los resultados presentados ofrecen una primera cuantificación entre ambas soluciones, sin embargo, los usuarios deben conocer que las dos metodologías tienen una alta dependencia de las coordenadas y época de referencia de las estaciones base. En este estudio se quiere ofrecer un primer parámetro de discrepancia en el uso de NTRIP para levantamientos topográficos.

Palabras clave: GNSS, RTK, corrección vía radio, corrección vía NTRIP, CR-SIRGAS.

*jorge.moya.zamora@una.cr  <https://orcid.org/0000-0001-6953-4885>

†kenneth.ovares.sanchez@una.cr  <https://orcid.org/0009-0005-7381-0594>

‡921topografia@gmail.com  <https://orcid.org/0009-0005-9835-2315>

§jlopez@japdeva.go.cr  <https://orcid.org/0009-0006-7079-9243>

¶nikolebarrantes56@gmail.com  <https://orcid.org/0009-0005-2317-3013>

||efrain.menjivar.perez@una.cr  <https://orcid.org/0009-0000-2415-2285>

ABSTRACT

The results obtained from the evaluation of the compatibility of the solutions of cartographic coordinates and ellipsoid height determined through the application of GNSS (Global Navigation Satellite Systems) survey methodologies in the differential correction modalities RTK (Real Time Kinematic) via radio and via internet via NTRIP (Networked Transport of RTCM via Internet Protocol) are presented. The demand for the latter has been growing since the service was launched at the beginning of the year 2023. The survey methodology with correction via NTRIP involves making observations in a few seconds, while the use of radio requires more measurement time. Both offer adequate solutions within the tolerance parameters established by national legislation. Six data sets with horizontal and vertical coordinate differences were determined by taking standard static solutions. The R language was used as a tool for generating the results. These reflected a consistency between the RTK survey via radius of approximately 1.3 cm horizontally and -7 cm vertically. The results presented offer a first quantification between both solutions, however, users should be aware that both methodologies have a high dependence on the coordinates and reference epoch of the base stations. In this study we want to offer a first discrepancy parameter in the use of NTRIP for topographic surveys.

Keywords: GNSS, RTK, radio correction, NTRIP correction, CR-SIRGAS.

1 Introducción

En Costa Rica se cuenta con una red de 14 estaciones GNSS de operación continua que materializan el marco geodésico nacional de referencia denominado como CR-SIRGAS. Actualmente ofrecen también a los usuarios correcciones diferenciales vía NTRIP ([Instituto Geográfico Nacional de Costa Rica, 2022](#)). El creciente uso de este servicio como complemento a las distintas metodologías de levantamiento han venido en aumento debido, a entre otros aspectos a una facilidad de acceso del servicio, eficiencia en los resultados y a una considerable reducción en la inversión de equipos. A pesar de estas y otras ventajas, aun se depende de la cobertura de la señal de internet que en Costa Rica alcanza casi un 90% ([Superintendencia de Telecomunicaciones, 2024](#)), situaciones en las cuales los profesionales recurren a técnicas de corrección diferencial vía radio o a combinación de metodologías GNSS y convencionales. Si la finalidad de los levantamientos topográficos es surtir algún efecto catastral y legal, se cuenta con una reglamentación que regula principalmente las exactitudes finales que los profesionales deben cumplir para garantizar una adecuada georeferenciación al marco nacional. Sin embargo, los levantamientos NTRIP ofrecen una solución de coordenadas instantánea, la cual está totalmente correlacionada con la época de referencia de la estación base, la cual en el caso de Costa Rica es 2019,24.

En este estudio particular se tomó como base un campo puntual establecido por medio de mediciones GNSS estáticas enlazadas al marco geodésico nacional de referencia CR-SIRGAS y localizado en la zona urbana de la ciudad de San Pablo de Heredia ([Espinoza *et al.*, 2023](#)). Posteriormente, se efectuaron levantamientos en la modalidad RTK y NTRIP para evaluar la compatibilidad tanto en magnitud como en dirección de dichas soluciones de coordenadas cartográficas y de altura elipsoídica respecto del conjunto de coordenadas estáticas. A continuación, se presentan los resultados obtenidos los cuales fueron evaluados inicialmente por medio de parámetros estadísticos determinados con el lenguaje R.

1.1 Levantamientos GNSS en la modalidad relativa estática

La determinación de la posición por medio de técnicas GNSS depende inicialmente de la posibilidad de conocer la distancia entre los distintos satélites en órbita y los equipos receptores en tierra. Los resultados obtenidos de un posicionamiento estático relativo GNSS dependen, además, de una combinación de

distintos elementos como, por ejemplo, los métodos de observación de campo, el tiempo contemplado en las mediciones, las condiciones físicas donde se realizan los levantamientos, el instrumental utilizado, el procesamiento de las mediciones y el sistema de referencia al cual se requiera hacer la georreferenciación. En este tipo de posicionamiento diferencial intervienen al menos dos equipos donde el objetivo principal es la determinación de las componentes del vector espacial en los puntos considerados. En esta técnica se cancelan y reducen los errores de tipo sistemático y aleatorios (Hofmann-Wellenhof *et al.*, 2007; Leick *et al.*, 2015). Entre sus aplicaciones clásicas se encuentran la determinación de puntos con finalidades principalmente topográficas, catastrales y geodésicas. En la Figura 1 se describe el principio del posicionamiento relativo GNSS en el cual dos receptores denominados A y B reciben simultáneamente señales satelitales (líneas punteadas de color rojo). Luego del procesamiento de la información se determinan las componentes del vector tridimensional (ΔX_{AB} , ΔY_{AB} , ΔZ_{AB}) entre los dos puntos A y B representado por la línea de color azul.

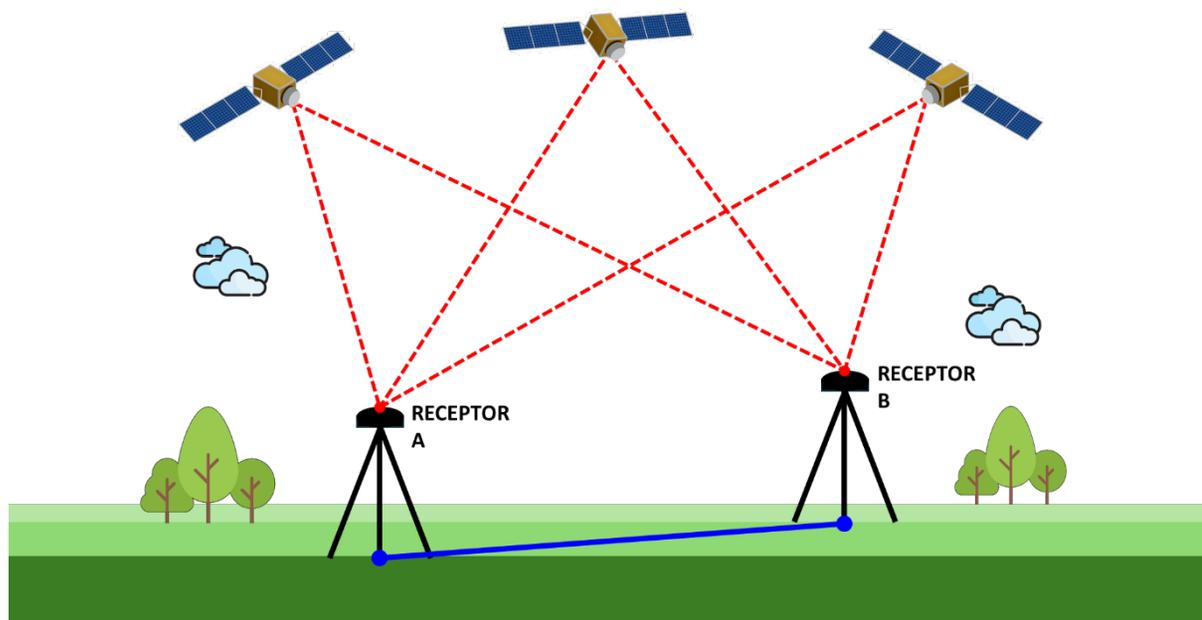


Figura 1: Principio del posicionamiento relativo estático GNSS usando dos receptores A y B para la determinación de las componentes tridimensionales del vector espacial. Fuente: elaboración propia.

1.2 Levantamientos GNSS en modalidad RTK

El posicionamiento relativo puede trabajarse en la modalidad de tiempo real, la cual ha cobrado un amplio interés en la última década, no solo por su rapidez, sino que también debido a la relativa alta exactitud en coordenadas que se obtiene prácticamente en segundos. Lo anterior como una consecuencia de los fuertes avances tecnológicos en informática y telecomunicaciones que han permitido desarrollar distintos algoritmos que reducen la influencia de muchas de las principales fuentes de incertidumbre en las observaciones GNSS, tanto para el posicionamiento en postproceso como en la variante del tiempo real.

El concepto fundamental de las mediciones basadas en RTK (*Real Time Kinematic*) consiste en usar mediciones cortas del tiempo por medio de las mediciones de fase (Lee y Ge, 2006). El principio de la técnica se presenta con ayuda de la Figura 2, en la cual se tienen dos receptores denominados como base y rover. Sobre este punto de coordenadas conocidas se ubica el receptor base. Modernamente también se pueden

aplicar varias técnicas para determinar coordenadas del punto base. Luego, tanto el receptor base como el rover o receptor móvil inician medición (líneas punteadas de color rojo) y fijan ambigüedades. En el receptor base se genera un modelo de corrección, el cual se transmite en casi tiempo real al rover para obtener coordenadas corregidas (línea continua de color azul). El retardo entre la emisión y la recepción podrá ser de un par de segundos dependiendo de la distancia, condiciones físicas del lugar y calidad de los equipos.

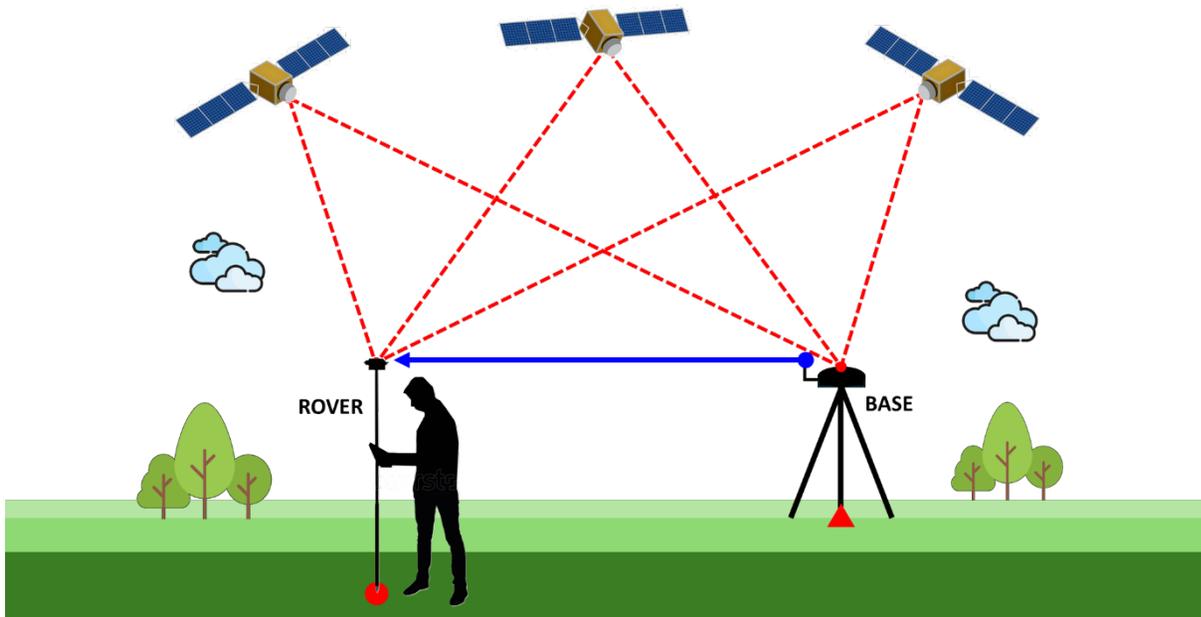


Figura 2: Principio del posicionamiento relativo GNSS modalidad RTK. Desde un receptor base ubicado en un punto de coordenadas conocidas se envían correcciones al receptor rover vía radio. Fuente: elaboración propia.

El formato de transmisión fue establecido por la *Radio Technical Commission for Maritime* (RTCM), la cual tiene varios comités especializados (SC) los cuales están encargados de determinar estándares internacionales la comunicación y navegación radial. Específicamente el SC104 determina y establece los formatos para la transmisión de las correcciones en GNSS, inició en 1983 con la versión 1.0 y fue reemplazado en 1990 por la versión 2.0. Es el formato internacional estandarizado para la interoperabilidad entre diferentes tipos y marcas de receptores GNSS cuando se trabaja con datos en tiempo real. El CRM evolucionó debido a los avances en las señales GNSS (Berné Valero *et al.*, 2019).

1.3 Levantamiento GNSS en modalidad NTRIP

En septiembre de 2004 la RTCM completó la norma que definió un protocolo para la transmisión de datos GNSS vía internet denominada como Red de Transporte de RTCM a través de Protocolo de Internet (NTRIP). El desarrollo fue iniciado la Agencia de Geodesia y Cartografía de Alemania (BKG) y la Universidad de Dortmund, el cual está basado en un Protocolo de Transferencia de HiperTexto (*Hiper Text Transfer Protocol* (HTTP)) que permite transmitir cualquier flujo o “stream” de datos GNSS desde una fuente a receptores fijos o móviles por medio de internet y con una alta precisión. El NTRIP, por lo tanto, es el protocolo a nivel de aplicación que envía los datos sobre http, siendo el estándar actual en la transmisión de correcciones diferenciales a través de internet (Weber *et al.*, 2005). La configuración para levantamientos NTRIP consta de los siguientes componentes básicos (Berné Valero *et al.*, 2019):

- a. NTRIP source: corresponde con las estaciones GNSS generadoras de las correcciones diferenciales y desde el cual se transmiten,
- b. NTRIP server: es un programa que envía las correcciones desde la fuente al caster,
- c. NTRIP caster: es un servidor HTTP que actúa de nodo distribuidor entre el NTRIP server y el NTRIP client verificando y autenticando a los usuarios, también revisa constantemente la integridad y calidad de las correcciones,
- d. NTRIP client: es un programa que permite confirma a la lista de fuentes para acceder a sus correcciones diferenciales y que son enviadas al rover.

En la Figura 3 se representa el principio del posicionamiento GNSS por medio de NTRIP. Una serie de receptores GNSS generalmente estaciones de operación continua reciben las señales satelitales (líneas punteadas de color rojo). Modernamente tienen la capacidad de funcionar además de fuente (*source*) como servidor (*server*). Luego, la información de las correcciones se envía a centro (*caster*) que recibe la información y la difunde por medio de una única dirección IP. Finalmente, los usuarios acceden a dichas correcciones por medio un programa cliente (*client*) que accede al *caster* y las envía luego al rover determinar coordenadas corregidas. Una de las claras ventajas del sistema es que la transmisión se hace vía internet y ésta puede ser capturada desde cualquier dispositivo que disponga de una conexión a red.

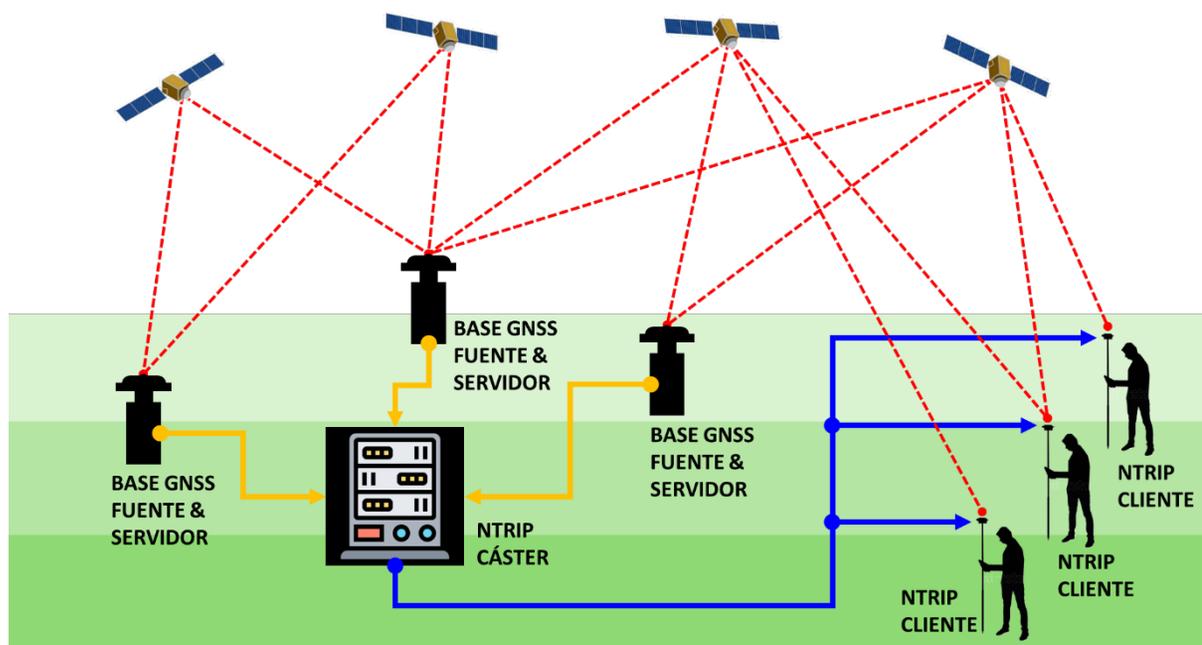


Figura 3: Principio del posicionamiento relativo GNSS modalidad RTK con transmisión por protocolo NTRIP. Las bases envían correcciones diferenciales a un caster al cual se conectan los usuarios vía internet. Fuente: elaboración propia.

1.4 El Marco Geodésico de Referencia de Costa Rica

La base geodésica de Costa Rica está conformada inicialmente por un total de 14 estaciones GNSS de operación continua administradas por el Instituto Geográfico Nacional. Se le suman adicionalmente una

serie de puntos pasivos. Particularmente las estaciones GNSS forman parte de la Red de Operación Continua del Sistema de Referencia Geodésico para las Américas (SIRGAS) denominada como (SIRGAS-CON) (SIRGAS, 2024). Esto quiere decir que semanalmente se calculan las coordenadas tridimensionales geocéntricas de cada una de las estaciones por medio de los Centro de Procesamiento SIRGAS. El Marco Geodésico Nacional de Referencia de Costa Rica denominado como CR-SIRGAS se definió inicialmente con referencia a la época 2014,59 y contemplando el IGB2008 (Decreto Ejecutivo 40962-MJP). Actualmente se trabaja con la segunda versión de CR-SIRGAS la cual tiene como época de referencia 2019,24 y marco de referencia internacional IGS2014 (Moya Zamora, 2022).

Lo anterior implica que todos los productos topográficos independientemente de la metodología de levantamiento que requieran de oficialización por parte de la Subdirección Catastral deberán estar georreferenciados a CR-SIRGAS (Moya Zamora *et al.*, 2025). Debido a la pluralidad de técnicas para realizar el proceso de georreferenciación de la información, es necesario conocer bien la legislación respectiva cuyos alcances escapan de los objetivos de este estudio, sin embargo, el lector puede consultar a Moya Zamora *et al.* (2025), donde se presentan una serie de consideraciones relacionadas con esta temática.

1.5 El Servicio de Corrección Diferencial Vía NTRIP de Costa Rica

Actualmente el Instituto Geográfico Nacional de Costa Rica (IGNCR) tiene una red de estaciones GNSS de operación continua las cuales por un lado sustentan de manera física el marco de referencia geodésico nacional CR-SIRGAS y, por otro lado, desde el año 2022, se ha dado un enorme paso con la implementación del servicio de corrección diferencia en tiempo real vía NTRIP desde cada una de las 14 estaciones (Instituto Geográfico Nacional de Costa Rica, 2022). Por medio de este servicio, los usuarios poseen ahora una herramienta más que proporciona datos debidamente georreferenciados de acuerdo con las directrices del IGNCR. Las coordenadas de las estaciones GNSS de operación continua en la época de referencia 2019,24, marco CR-SIRGAS. El protocolo de acceso a este servicio es sencillo y se puede consultar en el siguiente enlace: <https://www.snitcr.go.cr>. De momento el servicio está restringido solamente a profesionales costarricenses.

Actualmente, algunas empresas privadas han colocado sus propias bases GNSS y ofrecen el servicio de corrección diferencial NTRIP a los profesionales costarricenses. En el siguiente enlace https://qgiscloud.com/jalpizar/VISOR_DE_CORS_NTRIP2 se puede revisar la ubicación de algunas de estas estaciones. Sin embargo, es necesario que los usuarios confirmen la integridad de las correcciones, así como también el marco y la época de referencia de las coordenadas de estas bases.

1.6 Análisis exploratorio de datos

Modernamente existen muchas y diferentes herramientas informáticas que facilitan el tratamiento estadístico de datos derivados de procesos experimentales. Entre los más usados y citados en los últimos años están los lenguajes de código abierto Python y R (Wallin, 2024); siendo R un lenguaje creado y orientado específicamente al análisis, modelamiento estadístico y visualización de información (R Core Team, 2024).

Independientemente de la herramienta utilizada, lo que corresponde inicialmente es realizar un análisis exploratorio de datos (AED), el cual consiste en hacer una exploración de la información, analizando la estructura de las variables e indagando la distribución que pueden seguir variables numéricas. En el AED se buscan posibles patrones dependiendo del tipo de datos con los cuales se podrán establecer potenciales hipótesis que luego se confirmarán o rechazarán con los métodos estadísticos aplicados posterior al AED (Soto-Rojas, 2022). Miranda-Salas y Condal en (2003) señalan que el análisis exploratorio permite detectar problemas de representatividad en el muestreo, describir la existencia de dependencia espacial en los

datos, y eventualmente ajustar un modelo de representación, así como estimar el error asociado antes de aplicar un algoritmo de interpolación espacial. En este artículo se usó el lenguaje R para realizar los cálculos respectivos (R Core Team, 2024). A continuación, se describen de manera general algunos de los parámetros usualmente usados como parte del AED.

1.6.1 Covarianza

La covarianza se define como la medida estadística que refleja cómo se relacionan conjuntamente dos variables respecto a sus medias. Una covarianza positiva refleja que las variables aumentan conjuntamente, mientras que una covarianza negativa implica disminución de una de las variables respecto a la otra. Una covarianza nula indica que no hay relación entre las variables. La covarianza posee unidades. La formulación es ampliamente conocida y para un conjunto de datos asumidos como muestra se calcula según la Ecuación 1.

$$S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad [1]$$

Donde:

- S_{xy} : Covarianza entre X e Y
- x_i : Valores de la variable X en una muestra
- y_i : Valores de la variable Y en una muestra
- \bar{x} : Media de los valores de la muestra X
- \bar{y} : Media de los valores de la muestra Y
- n: Tamaño de la muestra

1.6.2 Correlación

El coeficiente de correlación de Pearson es una medida estadística de la relación lineal que existe entre pares de variables (X, Y) cuantitativas y continuas, sin embargo, no aporta información sobre las relaciones más allá de datos bivariados, además, no es sensible a valores atípicos y no puede detectar correctamente correlaciones curvilíneas. Este coeficiente varía entre -1 y 1. Un valor -1 indica una relación lineal inversa perfecta entre las variables; mientras que un valor de 1 representa una relación lineal directa perfecta entre las variables. Un valor nulo indica que las variables son linealmente independientes. El coeficiente de correlación es adimensionado debido a que es el cociente de covarianza y el producto de las desviaciones estándar de las variables. La formulación es ampliamente conocida y se calcula según la Ecuación 2.

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad [2]$$

Donde:

- r_{xy} : Coeficiente de correlación
- x_i : Valores de la variable X en una muestra
- y_i : Valores de la variable Y en una muestra
- \bar{x} : Media de los valores de la muestra X
- \bar{y} : Media de los valores de la muestra Y

1.6.3 Representación gráfica

Trabajando con pares de variables surge la necesidad de conocer inicialmente el comportamiento de la variable asumida como dependiente respecto de la variable independiente. Un primer vistazo gráfico permite detectar eventuales patrones o agrupamientos en los datos o cualquier otro comportamiento. El gráfico de dispersión, de histograma, el boxplot y el Q-Q plot son ampliamente conocidos y su construcción con herramientas modernas ya sean libres o de pago o bien en línea es sencillo, por lo que en este trabajo se le recomienda al lector consultar a [Gómez \(2016\)](#).

Por medio del diagrama de dispersión se logra una visualización global de las variables, mientras que con el histograma se representa la frecuencia de los datos para determinados intervalos o clases previamente establecidas. Su forma, permite, por lo tanto, conocer la tendencia de su distribución. El boxplot facilita una visualización de la distribución de los datos dentro de los cuartiles del 25 % y el 75 %. Por su parte un Q-Q plot compara si los datos provienen de la misma distribución. Habitualmente se compara si el conjunto muestral sigue la distribución teórica, generalmente la normal los cual se ve cuando los datos aparecen alineados.

1.6.4 Normalidad de los datos

La determinación de la normalidad de un conjunto de datos se puede cuantificar por medio de diferentes pruebas. Este proceso es fundamental ya que muchos de los procedimientos estadísticos asumen que los datos siguen una distribución normal. Una distribución normal es aquella distribución de probabilidad simétrica que se describe por medio de dos parámetros denominados media y desviación estándar (m , s). La media representa el valor central de la distribución y la desviación estándar ofrece información de la variabilidad de los datos respecto de la media. Algunas de las características clásicas de una distribución normal son su forma de campana donde las desviaciones estándar sucesivas con respecto a la media establecen valores de referencia, en el centro de la distribución coinciden la media, la mediana y la moda lo que implica que el área bajo la curva a ambos lados de la media es igual. La distribución de probabilidad normal es simétrica alrededor de la media. La curva desciende en ambas direcciones a partir del valor central siendo asintótica ([Romero Saldaña, 2016](#)).

1.6.5 Igualdad de las varianzas

Considerando dos vectores de datos se calculan sus respectivas varianzas y la determinación de la homocedasticidad o igualdad de varianzas se hace a partir del cociente de las estas. La prueba plantea una hipótesis nula (H_0) en la cual se asume que no hay diferencia entre las varianzas; y una hipótesis alternativa (H_1) la cual asume que esa diferencia no es nula. El estadístico compara con el respectivo cuantil de la distribución Fisher. La formulación se presenta en la Ecuación 5 y en el lenguaje R, se puede aplicar esta prueba por medio de la función "*var.test()*".

$$F = \frac{S_2^2}{S_1^2} \quad [3]$$

Donde:

F : Estadístico

S_1^2 : varianza del vector de datos 1

S_2^2 : varianza del vector de datos 2

1.6.6 Comparación de dos medias

De acuerdo con [Gómez \(2016\)](#) en muchas ocasiones se tienen resultados que se efectúan sobre muestras dependientes o pareadas cuando, por ejemplo, se realizan sobre el mismo objeto, lo que implica que realmente lo que se tiene son muestras de pares y lo que corresponde es determinar si las diferencias ($d_i = y_i - x_i$) de los pares son significativamente diferentes de cero. La prueba de comparación plantea dos hipótesis: una hipótesis nula (H_0) en la cual se asume que la diferencia d es cero y una hipótesis alternativa (H_1) en la cual, dicha diferencia no es nula. El planteamiento matemático es conocido y el resumen de la formulación se presenta en el conjunto de Ecuaciones 4. En el lenguaje R la aplicación de esta prueba se realiza con la función "*t.test()*" configurando la opción "*paired = TRUE*" ([R Core Team, 2024](#)).

$$t = \frac{d}{S_d} \quad [4]$$

$$S_d = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Donde:

d : diferencias promedio entre las muestras x_i e y_i

t : varianza del vector de datos 1

S : varianza del vector de datos 2

S_d : desviación estándar del vector de diferencias

n : tamaño de la muestra

1.6.7 Contrastes de normalidad

Corresponde con determinadas pruebas estadísticas que se utilizan para la comprobación de que un cierto conjunto de datos sigue una distribución normal. También existen herramientas gráficas que permiten identificar la distribución de los datos, las cuales según [Luzuriaga Jaramillo et al. \(2023\)](#) deben ser trabajadas de manera complementaria para una comprensión más completa. La aplicación de pruebas de normalidad pretende garantizar la robustez de los análisis estadísticos ([Flores y Flores, 2021](#)). Los contrastes se basan en el planteamiento de hipótesis de trabajo, siendo la denominada hipótesis nula (H_0) en la cual se asume que los datos siguen una distribución normal y una hipótesis alternativa (H_1) en la cual se asumirá que los datos no siguen una distribución normal.

Un aspecto que debe considerarse es el tamaño de la muestra por analizar. En este estudio de trabajó con un conjunto de datos de tamaño $n = 22$ por lo que se utilizó la prueba Shapiro-Wilk, en la cual, además, de acuerdo con [Roco-Videla et al. \(2023\)](#) debe ser complementado con los respectivos gráficos de histograma y Q-Q plot.

La prueba Shapiro Wilk data de los años 1960 y se utiliza para comprobar la normalidad de conjuntos de datos pequeños ($n < 50$) ([Shapiro y Wilk, 1965](#); [Mohd Razali y Bee Wah, 2011](#); [de la Garza et al., 2013](#)). Esta prueba paramétrica que mide la correlación entre los datos y las puntuaciones normales correspondientes. Calcula un estadístico de prueba (W) y lo compara con los valores críticos para determinar si los datos se desvían significativamente de la normalidad. Se plantea como hipótesis nula H_0 que los datos provienen de una distribución normal con un nivel de incertidumbre del $\alpha = 5\%$. La hipótesis alternativa H_1 plantea por lo tanto que la distribución de los datos no es normal. La formulación se plantea en la Ecuación 5:

$$W = \frac{[\sum_{i=1}^n (a_i [X_{n-i+1} - X_i])]^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \quad [5]$$

Donde:

W : Estadístico Shapiro-Wilk

a : Coeficiente Shapiro-Wilk

n : Total de datos

X_i : Variable a probar en la observación i

\bar{X} : media de la variable

s : Número de diferencias

2 Metodología

2.1 Área de trabajo

El área de trabajo se localizó en la zona central urbana del cantón 09 llamado San Pablo perteneciente a la provincia de Heredia, Costa Rica. La zona de estudio se encuentra ubicada entre las coordenadas cartográficas norte 1105000 m y 1106000 m y coordenadas este 489000 m y 491000 m según la proyección cartográfica nacional de Costa Rica CRTM05 y con una altura media de sobre el nivel de 1200 m (Costa Rica, 2017). Dentro de esta zona se estableció una red topográfica que abarcó un área aproximada de 18 hectáreas y cuyo objetivo fundamental fue brindar apoyo para levantamientos y georreferenciación de información dentro de la zona (Espinoza *et al.*, 2023). En la Figura 4 se puede apreciar la distribución de los puntos sobre los cuadrantes urbanos.

2.2 Campaña de medición GNSS en la modalidad estática

Esta campaña de medición fue desarrollada aplicando el principio de vectores independientes entre los puntos de la red y tres estaciones GNSS de operación continua pertenecientes al Marco Geodésico Nacional de Costa Rica CR-SIRGAS (Moya Zamora, 2022). Se utilizaron cuatro receptores modelo R10 de la cada comercial Trimble. El procesamiento fue realizado con el programa Trimble Business Center (TBC) versión 5.2 (Espinoza *et al.*, 2023) en el cual se contemplaron archivos de coordenadas semanales finales determinadas por los Centros de Procesamiento del Sistema de Referencia Geodésico para las Américas SIRGAS (SIRGAS, 2024) y archivos de órbitas finales del IGS (Crustal Dynamics Data Information System, 2023; Instituto Geográfico Nacional de Costa Rica, 2022). El procesamiento se hizo a la época de observación $t_i = 2022,8630$ y se usaron como vínculo al marco nacional tres estaciones GNSS de operación continua, las denominadas RIDC, PUNT y CIQE. Los resultados finales en coordenadas cartográficas (Norte y Este) ajustadas en la proyección nacional CRTM05 y sus errores se presentan en la Tabla 1 (Espinoza *et al.*, 2023).

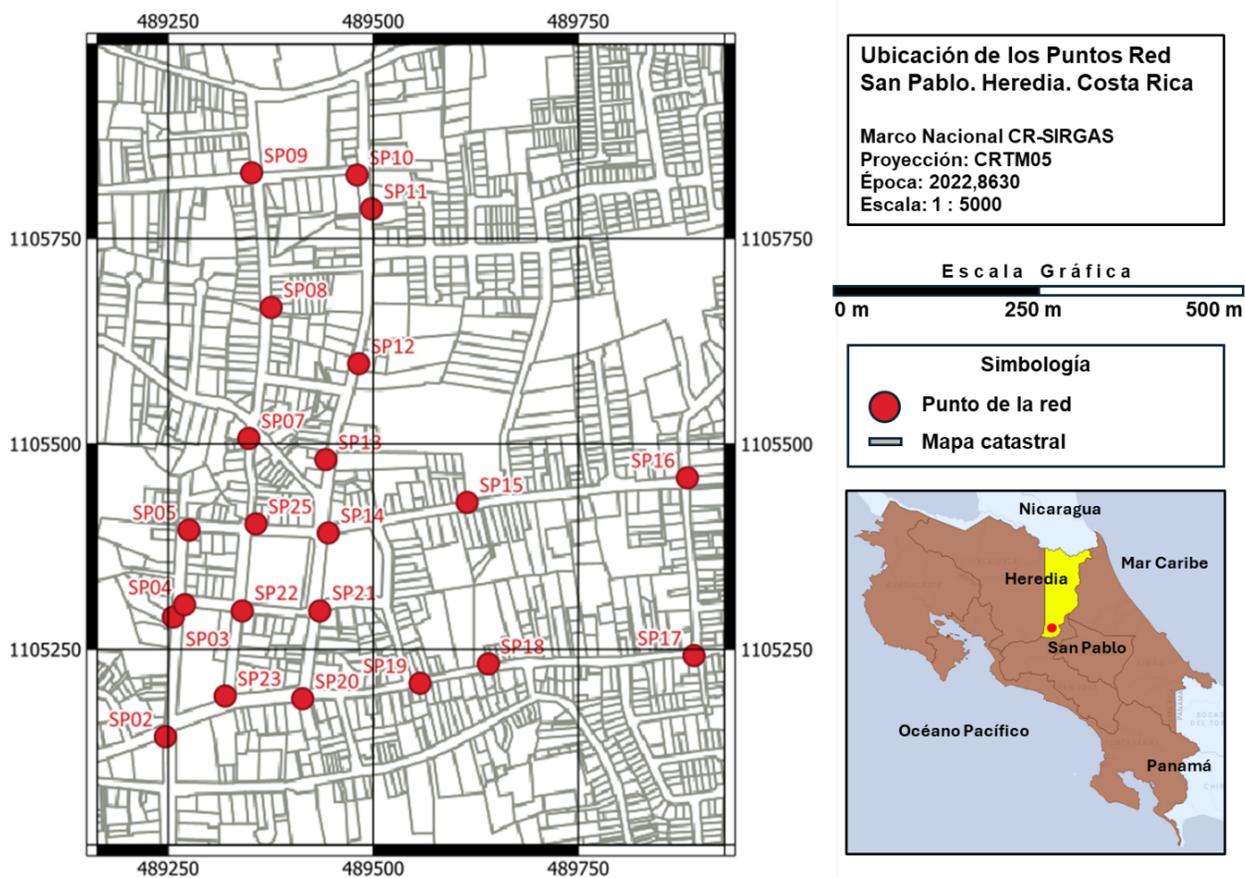


Figura 4: Ubicación de los puntos de la red geodésica en el cantón de San Pablo de Heredia. Fuente: elaboración propia a partir del programa QGIS (QGIS, 2024).

Tabla 1: Coordenadas cartográficas ajustadas y errores en proyección CRTM05 resultado de la campaña de medición GNSS modalidad estática y del procesamiento con el programa TCB. Época de referencia 2022,8630 y marco de referencia CR-SIRGAS. Fuente: elaboración propia a partir de (Espinoza *et al.*, 2023).

Punto	Este [m]	s_E [cm]	Norte [m]	s_N [cm]	Punto	Este [m]	s_E [cm]	Norte [m]	s_N [cm]
SP02	489247,200	0,8	1105143,775	0,7	SP14	489445,800	1,0	1105391,905	0,7
SP03	489256,860	1,0	1105289,494	0,8	SP15	489615,180	1,0	1105429,018	0,7
SP04	489270,620	1,4	1105304,508	1,2	SP16	489883,790	0,8	1105458,914	0,7
SP05	489275,940	1,2	1105395,385	1,0	SP17	489891,860	0,8	1105242,547	0,7
SP07	489348,930	0,9	1105506,944	0,7	SP18	489641,050	1,3	1105232,412	0,9
SP08	489376,170	0,8	1105666,334	0,6	SP19	489557,830	2,2	1105208,856	1,2
SP09	489352,280	1,0	1105830,246	0,9	SP20	489414,550	1,3	1105190,076	0,9
SP10	489481,004	0,8	1105827,564	0,6	SP21	489435,440	1,6	1105296,885	1,2
SP11	489498,580	0,9	1105786,496	0,7	SP22	489340,930	0,9	1105296,889	0,6
SP12	489482,970	1,0	1105597,986	0,7	SP23	489320,130	0,9	1105193,332	0,7
SP13	489442,890	1,2	1105481,181	0,7	SP25	489357,690	1,6	1105402,954	1,5

2.3 Campaña de medición GNSS en la modalidad RTK

En la campaña de medición GNSS en tiempo real se utilizaron receptores modelo R10 de la casa comercial Trimble. Estas mediciones se efectuaron seis meses después del levantamiento estático, específicamente el 8 de mayo de 2023 siguiendo un recorrido previamente planificado. Se colocaron los receptores designados como base en los puntos SP10 (ver Figura 4) a partir de los cuales se levantaron los restantes puntos (Espinoza *et al.*, 2023). Los resultados obtenidos de esta campaña en coordenadas cartográficas se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2: Coordenadas cartográficas ajustadas y errores en proyección CRTM05 resultado de la campaña de medición GNSS modalidad RTK. Época de referencia 2022,8630 y marco de referencia CR-SIRGAS. Fuente: elaboración propia a partir de Espinoza *et al.* (2023).

Punto	Este [m]	s_E [cm]	Norte [m]	s_N [cm]	Punto	Este [m]	s_E [cm]	Norte [m]	s_N [cm]
SP02	489247,223	7,8	1105143,789	7,8	SP14	489445,806	5,7	1105391,912	5,7
SP03	489256,859	7,1	1105289,523	7,1	SP15	489615,203	14,8	1105429,004	14,8
SP04	489270,633	9,2	1105304,523	9,2	SP16	489883,805	13,4	1105458,909	13,4
SP05	489275,959	19,1	1105395,394	19,1	SP17	489891,898	17,0	1105242,549	17,0
SP07	489348,950	7,8	1105506,933	7,8	SP18	489641,087	5,7	1105232,387	5,7
SP08	489376,249	8,5	1105666,337	8,5	SP19	489557,859	14,8	1105208,850	14,8
SP09	489352,273	8,5	1105830,224	8,5	SP20	489414,562	9,2	1105190,104	9,2
SP10	489480,996	0,0	1105827,565	0,0	SP21	489435,455	11,3	1105296,882	11,3
SP11	489498,568	8,5	1105786,467	8,5	SP22	489340,957	7,8	1105296,896	7,8
SP12	489482,970	21,2	1105597,989	21,2	SP23	489320,150	14,8	1105193,324	14,8
SP13	489442,890	19,1	1105481,162	19,1	SP25	489357,723	13,4	1105402,962	13,4

2.4 Campaña de medición GNSS en la modalidad NTRIP

La campaña de medición en la modalidad NTRIP se realizó el día 7 de febrero de 2024. Se trabajó con receptor modelo RS2+ de la casa comercial Emlid. La metodología consistió en la configuración del instrumento para establecer la conexión con el caster del Instituto Geográfico Nacional de Costa Rica. En la etapa de medición el equipo brinda la cantidad de estaciones de vínculo disponibles, sin embargo, se escogió siempre como referencia la estación de operación continua GNSS denominada RIDC por ser la más cercana a la zona de trabajo aproximadamente a unos 10 km del centro de la ciudad de San Pablo. Se usaron en promedio 5 segundos de tiempo en cada uno de los puntos. Los resultados de la medición en coordenadas cartográficas y errores según el registro del equipo se encuentran en la Tabla 3. Como parte del proceso de medición se brindó una incertidumbre general de $\pm 1,0$ cm en cada una de las determinaciones. El archivo de salida de resultados solamente ofrece esta información. Además, como ya se mencionó anteriormente, las coordenadas de las estaciones base están referidas a la época 2019,2400 (Instituto Geográfico Nacional de Costa Rica, 2022).

Tabla 3: Coordenadas cartográficas ajustadas y errores en proyección CRTM05 resultado de la campaña de medición GNSS modalidad NTRIP. Época de referencia 2019,2400 y marco de referencia CR-SIRGAS. Fuente: elaboración propia a partir del archivo de salida levantamiento NTRIP.

Punto	Este [m]	s_E [cm]	Norte [m]	s_N [cm]	Punto	Este [m]	s_E [cm]	Norte [m]	s_N [cm]
SP02	489247,162	1,0	1105143,706	1,0	SP14	489445,766	1,0	1105391,842	1,0
SP03	489256,820	1,0	1105289,427	1,0	SP15	489615,162	1,0	1105428,934	1,0
SP04	489270,575	1,0	1105304,435	1,0	SP16	489883,758	1,0	1105458,835	1,0
SP05	489275,906	1,0	1105395,313	1,0	SP17	489891,824	1,0	1105242,461	1,0
SP07	489348,908	1,0	1105506,859	1,0	SP18	489641,030	1,0	1105232,337	1,1
SP08	489376,182	1,0	1105666,292	1,0	SP19	489557,822	1,0	1105208,780	1,0
SP09	489352,255	1,0	1105830,193	1,0	SP20	489414,526	1,0	1105190,011	1,0
SP10	489480,960	1,0	1105827,502	1,0	SP21	489435,404	1,0	1105296,785	1,0
SP11	489498,549	1,0	1105786,437	1,0	SP22	489340,880	1,0	1105296,821	1,0
SP12	489482,941	1,0	1105597,937	1,0	SP23	489320,086	1,0	1105193,264	1,0
SP13	489442,867	1,0	1105481,094	1,0	SP25	489357,629	1,4	1105402,852	1,1

2.5 Determinación de la componente vertical

Los resultados derivados de cada una de las tres metodologías de medición usadas permitieron obtener el valor de altura elipsoídica (h) sobre cada uno de los puntos. Se trabajó exclusivamente con este resultado y se descartó el valor de la denominada altura nivelada o física, la cual, se obtiene eventualmente por medio de la aplicación de un determinado modelo de ondulación y el cual no fue objetivo de este estudio. En la Tabla 4 se presentan los resultados obtenidos y sus errores para cada una de las tres modalidades empleadas. La época de referencia y marco de referencia corresponde con los datos de coordenadas horizontales presentados en las Tablas 1, 2 y 3 para las modalidades estática, RTK y NTRIP respectivamente.

3 Resultados

3.1 Cuantificación de los vectores de diferencias

La investigación se centró en determinar y analizar las diferencias de coordenadas según cada una de las dos metodologías empleadas (vía radio y vía NTRIP), usando como patrón el conjunto de coordenadas ajustadas obtenido de la campaña de medición GNSS estática relativa (ver Tabla 1) (Moya Zamora, 2022). Del conjunto original de puntos 24, se trabajó únicamente con un total de 22 ya que los restantes fueron destruidos. La cuantificación de las diferencias y los correspondientes análisis se realizaron por medio del lenguaje R, la cual es una herramienta mundialmente usada para el análisis estadístico y modelamiento (R Core Team, 2024).

La codificación usada para distinguir los resultados fue una G para indicar coordenadas obtenidas de mediciones GNSS estáticas relativas, mientras que la R se usó para identificar coordenadas obtenidas de RTK y una N indicar coordenadas derivadas de mediciones NTRIP. De esta manera, se establecieron las siguientes etiquetas para identificar los resultados: dE.RG, dN.RG y dh.RG son las diferencias en coordenadas este, norte y altura elipsoídica entre los resultados R (RTK) y G (estáticos). Análogamente la codificación dE.NG, dN.NG y dh.NG son las diferencias de coordenadas respectivas entre los resultados N (NTRIP) y G (estáticos). Los resultados de las mediciones fueron primeramente dispuestos en un archivo de formato MS.Excel el cual fue posteriormente cargado dentro del ambiente de R. En la Tabla 5 se

Tabla 4: Valores del componente de altura elipsoidal y errores para cada uno de los puntos de la red y para cada una de las tres metodologías empleadas. Fuente: elaboración propia a partir de [Espinoza et al. \(2023\)](#) y archivo de levantamiento NTRIP.

Punto	Estática		RTK		NTRIP	
	h [m]	s_h [cm]	h [m]	s_h [cm]	h [m]	s_h [cm]
SP02	1206.313	5.5	1206.244	2.2	1206.341	1.1
SP03	1211.783	3.4	1211.725	1.9	1211.782	1.0
SP04	1212.465	4.2	1212.406	2.6	1212.495	1.2
SP05	1215.525	3.4	1215.446	5.1	1215.567	1.1
SP07	1218.330	2.7	1218.069	1.8	1218.344	1.3
SP08	1226.060	2.1	1225.802	2.3	1226.088	1.1
SP09	1229.142	7.2	1228.883	2.4	1229.161	1.3
SP10	1229.553	2.3	1229.283	0.0	1229.564	1.3
SP11	1228.227	2.2	1227.994	2.3	1228.263	1.2
SP12	1224.852	2.8	1224.605	4.4	1224.907	1.5
SP13	1219.553	2.6	1219.338	4.4	1219.539	1.1
SP14	1214.727	2.4	1214.658	4.4	1214.735	1.1
SP15	1214.603	2.2	1214.504	5.5	1214.614	1.2
SP16	1213.578	5.6	1213.486	4.6	1213.575	1.0
SP17	1209.061	5.7	1208.971	6.0	1209.063	1.0
SP18	1207.628	3.1	1207.558	1.8	1207.653	1.4
SP19	1209.872	3.6	1209.769	4.6	1209.875	1.1
SP20	1211.394	3.6	1211.344	3.0	1211.401	1.0
SP21	1212.407	3.5	1212.300	3.5	1212.414	1.0
SP22	1214.046	2.7	1214.015	2.3	1214.063	1.2
SP23	1209.292	3.3	1209.205	4.8	1209.336	1.1
SP25	1217.258	4.3	1217.183	3.4	1217.288	1.7

presentan las diferencias de coordenadas junto con algunos de los estadísticos básicos determinados por medio del lenguaje R.

3.2 Análisis estadístico inicial de los datos

Con el objetivo de conocer la dispersión de las seis variables se usó la función `"pairs()"` (R Core Team, 2024) del lenguaje R con la cual se obtiene una matriz gráfica en cuya diagonal están las variables y fuera de ella los respectivos gráficos de dispersión. En la Figura 5 se muestra el resultado donde las líneas rojas en los gráficos de dispersión representan las líneas de regresión suavizadas.

Posteriormente se determinó la determinación de la matriz de covarianzas por medio de la función `"cov()"` del lenguaje R (R Core Team, 2024). A partir de esta función se obtiene la matriz completa en cuya diagonal están las varianzas y fuera de la diagonal las covarianzas. Los valores del triángulo superior de dicha matriz se presentan en la Tabla 6 cuyas unidades, para este estudio, son $[cm^2]$.

Al considerar que se cuenta con un conjunto de datos que son el resultado de diferencias de coordenadas de un mismo punto físico, se decidió calcular la correspondiente matriz de correlación para el conjunto de datos. Para esto se usó el paquete `"ggplot2"` (Wickham, 2016) y la función `"corrplot()"` (Wei y Simko, 2021) del lenguaje R. El resultado se presenta en la Figura 6, donde se valores numéricos de la correlación

Tabla 5: Diferencias de coordenadas cartográficas y altura elipsoidal para las modalidades RTK y NTRIP respecto de la estática y resumen de los parámetros estadísticos básicos. Fuente: elaboración propia a partir de los resultados con el lenguaje R (R Core Team, 2024).

Punto	dE.RG [cm]	dN.RG [cm]	dh.RG [cm]	dN.NG [cm]	dE.NG [cm]	dh.NG [cm]
SP02	2,3	1,4	-6,9	-3,8	-6,9	2,8
SP03	-0,1	2,9	-5,8	-4,0	-6,7	-0,1
SP04	1,3	1,5	-5,9	-4,5	-7,3	3,0
SP05	1,9	0,9	-7,9	-3,4	-7,2	4,2
SP07	2,0	-1,1	-6,1	-2,2	-8,5	1,4
SP08	-2,1	0,3	-5,8	-3,8	-4,2	2,8
SP09	-0,7	-2,2	-5,9	-2,5	-5,3	1,9
SP10	-0,8	0,1	-7,0	-4,4	-6,2	1,1
SP11	-1,2	-2,9	-3,3	-3,1	-5,9	3,6
SP12	0,0	0,3	-4,7	-2,9	-4,9	5,5
SP13	0,0	-1,9	-4,5	-2,3	-8,7	-1,4
SP14	0,6	0,7	-6,9	-3,4	-6,3	0,8
SP15	2,3	-1,4	-9,9	-1,8	-8,4	1,1
SP16	1,5	-0,5	-9,2	-3,2	-7,9	-0,3
SP17	3,8	0,2	-9,0	-3,6	-8,6	0,2
SP18	3,7	-2,5	-7,0	-2,0	-7,5	2,5
SP19	2,9	-0,6	-10,3	-0,8	-7,6	0,3
SP20	1,2	2,8	-5,0	-2,4	-6,5	0,7
SP21	1,5	-0,3	-10,7	-3,6	-10,0	0,7
SP22	2,7	0,7	-3,1	-5,0	-6,8	1,7
SP23	2,0	-0,8	-8,7	-4,4	-6,8	4,4
SP25	3,3	0,8	-7,5	-6,1	-10,2	3,0
Resumen de parámetros estadísticos básicos						
Mínimo [cm]	-2,1	-2,9	-10,7	-6,1	-10,2	-1,4
Máximo [cm]	3,8	2,9	-3,1	-0,8	-4,2	5,5
Rango [cm]	5,9	5,8	7,6	5,3	6,0	6,9
Moda [cm]	2,3	0,3	-6,9	-3,4	-6,8	3,0
Mediana [cm]	1,5	0,2	-6,9	-3,4	-7,0	1,6
Q1 [cm]	0,0	-1,0	-8,5	-3,9	-8,3	0,7
Q2 [cm]	1,5	0,2	-6,9	-3,4	-7,0	1,6
Q3 [cm]	2,3	0,8	-5,8	-2,4	-6,4	2,9
RIC [cm]	2,3	1,8	2,7	1,5	1,9	2,2
Promedio [cm]	1,3	-0,1	-6,9	-3,3	-7,2	1,8
s_0 [cm]	1,6	1,6	2,1	1,2	1,5	1,7
s_x [cm]	0,3	0,3	0,5	0,3	0,3	0,4
Coefficiente de asimetría	-0,3	0,0	-0,1	-0,1	-0,1	0,3
Curtosis	-0,7	-0,3	-0,6	0,5	0,0	-0,4

se presentan en el triángulo inferior y complementando la matriz, se tienen cuadros de colores y tamaños diferentes para dichos valores.

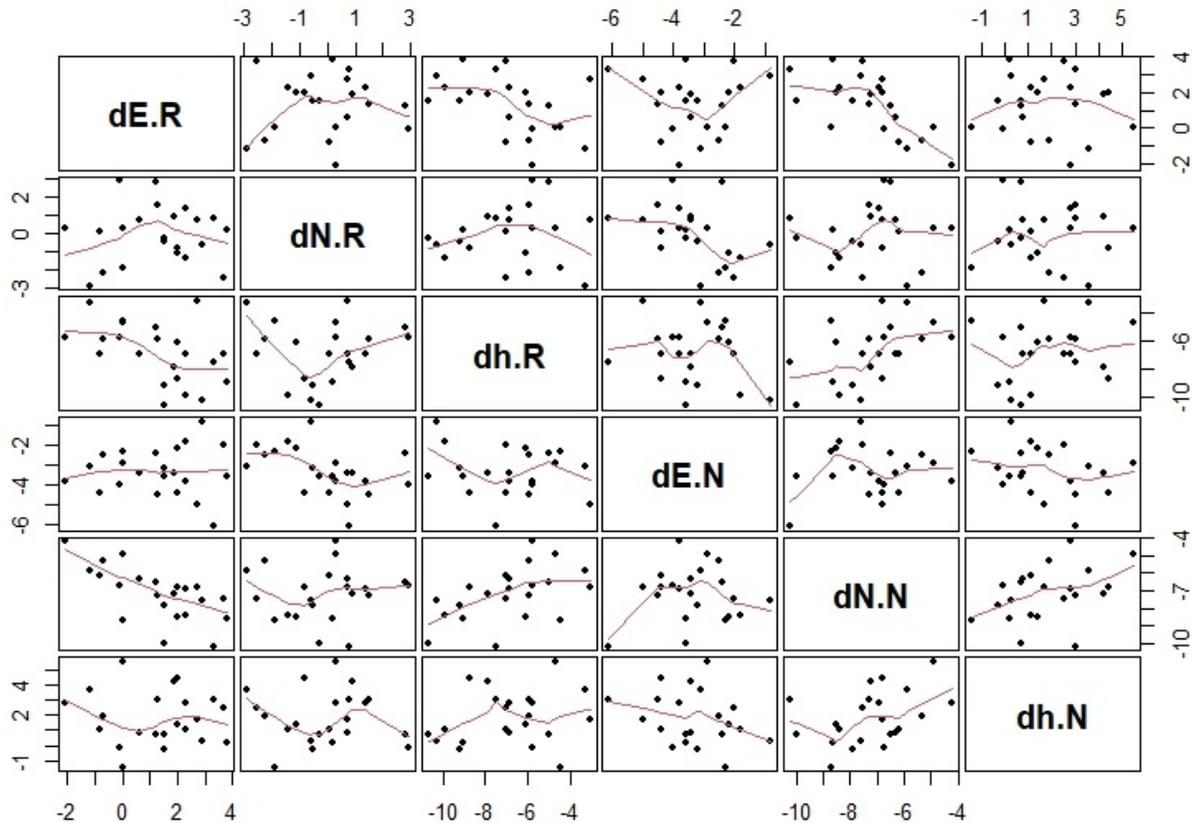


Figura 5: Matriz de dispersión de los vectores de coordenadas cartográficas y altura elipsoidal. Fuente: elaboración propia a partir de los resultados con el lenguaje R (R Core Team, 2024).

Tabla 6: Valores de la matriz de covarianzas para los vectores de diferencias. Fuente: elaboración propia a partir de los resultados con el lenguaje R (R Core Team, 2024).

	dE.R	dN.R	dh.R	dE.N	dN.N	dh.N
dE.R	2,67	0,13	-1,65	0,02	-1,63	-0,17
dN.R		2,41	0,19	-0,82	0,17	-0,07
dh.R			4,57	-0,44	1,66	0,77
dE.N				1,42	0,12	-0,60
dN.N					2,26	1,03
dh.N						2,97

En la Figura 7 se presentan en conjunto en la parte superior los histogramas de las diferencias de coordenadas R-G en la primera fila, mientras que en la segunda fila se tienen los histogramas para las diferencias N-G, ambos para diferencias de coordenadas en Este (color rojo), Norte (color azul) y Altura (color verde) respectivamente en las columnas de izquierda a derecha. En la parte inferior se presentan los Q-Q plot. Esta figura fue generada con la función `geom_histogram()` que es parte del paquete `ggplot2` y la función `qqqplot()` del lenguaje R (R Core Team, 2024).

Complementando el AED se presentan en la Figura 8 los boxplot para cada uno de los dos conjuntos de diferencias. El punto de color rojo corresponde con el promedio respectivo.

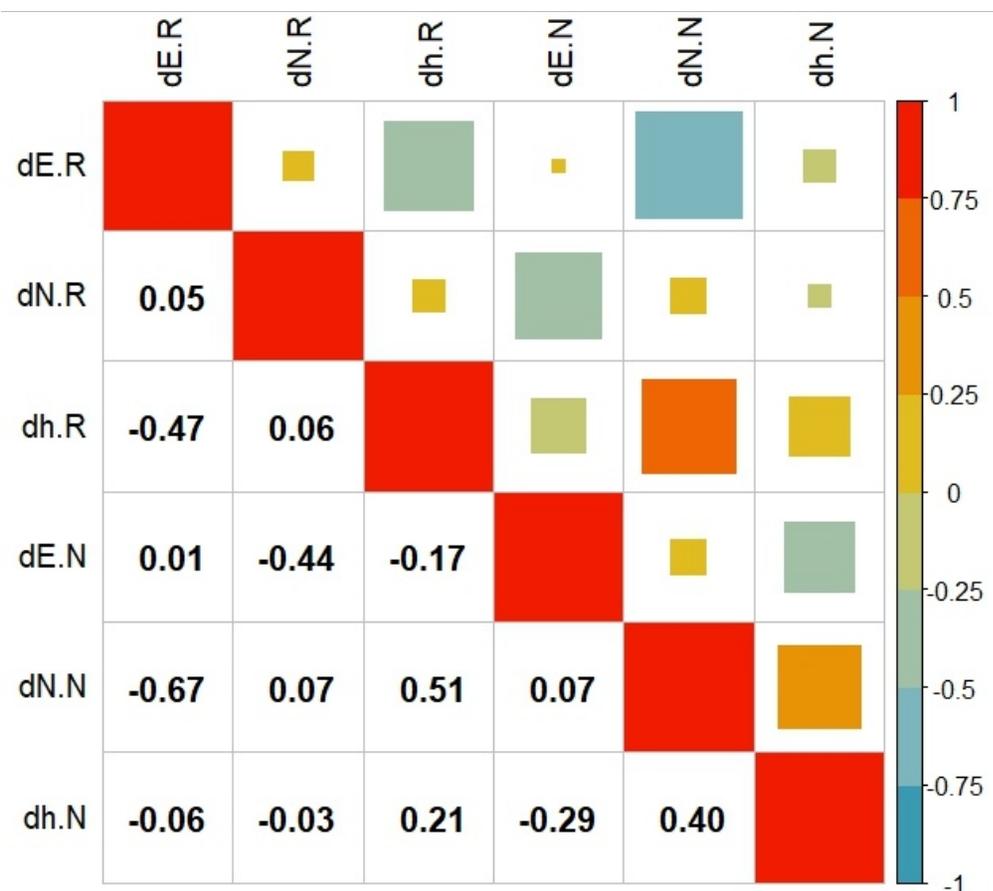


Figura 6: Matriz de correlación de los vectores de coordenadas cartográficas y altura elipsoidal. Fuente: elaboración propia a partir de los resultados con el lenguaje R (Wickham, 2016; Wei y Simko, 2021).

3.3 Análisis de varianzas y medias de los vectores diferencia

Comprobada la normalidad de los conjuntos de datos, se aplicó primeramente una prueba para verificar la homocedasticidad u homogeneidad de varianza a pares de vectores correspondientes para cada una de las coordenadas (dE.R y dE.N, dN.R y dN.N, dh.R y dh.N). En ambiente R esta prueba se aplica con la función llamada “*var.test()*” (R Core Team, 2024). Los resultados respectivos en los que se incluyen los límites del intervalo de confianza del estadístico se muestran en la Tabla 7.

Tabla 7: Resultados de la prueba de comprobación de homocedasticidad aplicada a pares vectores de diferencias de coordenadas cartográficas (R y N) y altura elipsoidal. Fuente: elaboración propia a partir de los resultados con el lenguaje R (R Core Team, 2024).

Parámetros de la función <i>var.test</i>	dE.R y dE.N	dN.R y dN.N	dh.R y dh.N
Estadístico F	1.8777	1.0662	1.5363
p-valor	0.1570	0.8846	0.3328
Límite inferior	0.7796	0.4427	0.6378
Límite superior	4.5225	2.5680	3.7003

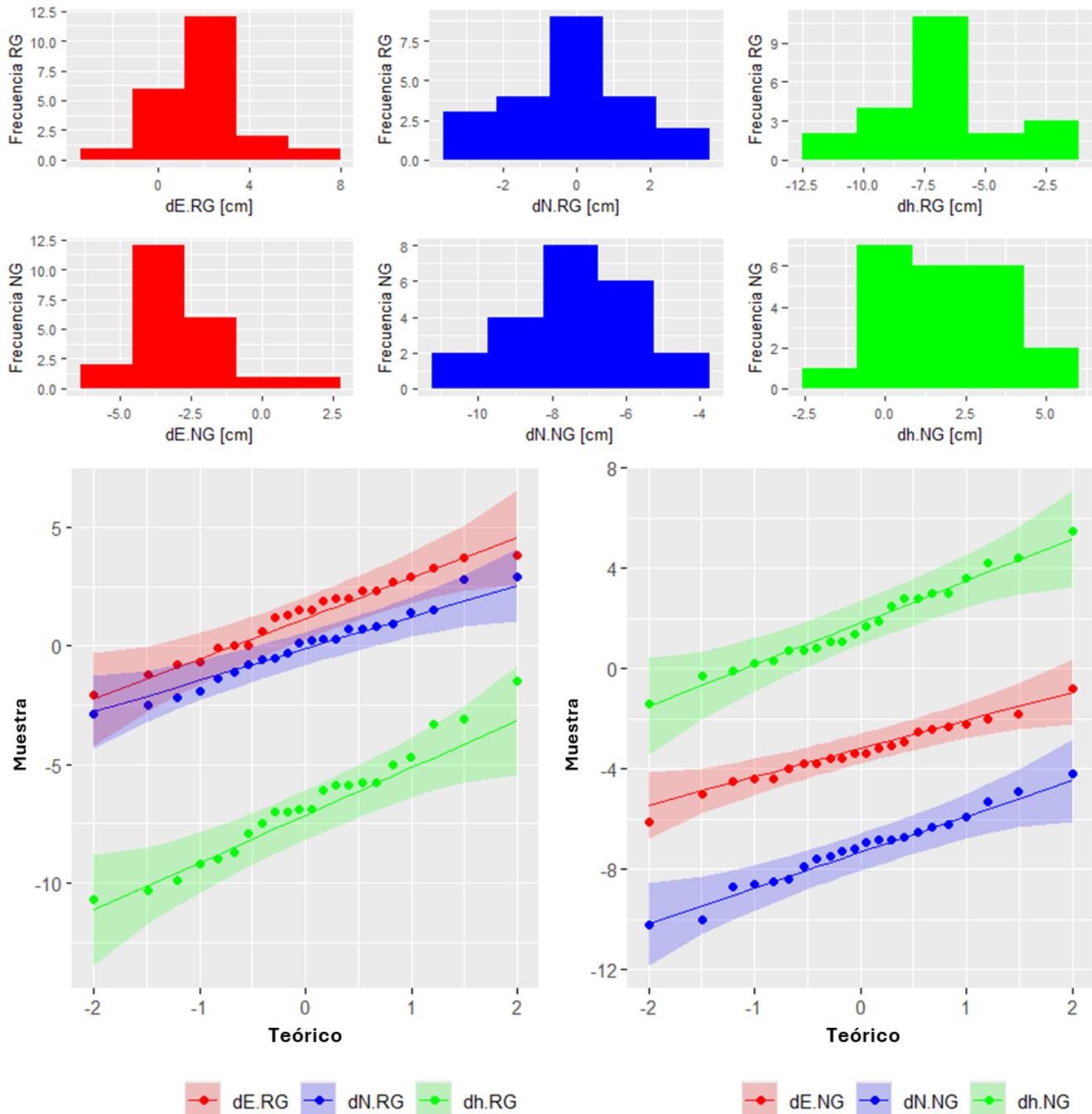


Figura 7: Conjunto de histogramas y Q-Q plot de las diferencias de coordenadas cartográficas y altura elipsoídica de los resultados RTK y NTRIP respecto de los resultados estáticos. Fuente: elaboración propia a partir de lenguaje R (R Core Team, 2024).

Luego, se realizó un contraste de hipótesis con el objetivo de verificar si las medias respectivas se pueden considerar iguales con un nivel de significancia del $\alpha = 5\%$. Esta prueba considera como hipótesis nula H_0 que las medias de las muestras son iguales y como hipótesis alternativa H_1 que dichas muestras no son iguales, por medio del planteamiento del estadístico t como cociente de las varianzas de las dos muestras (Gómez, 2016). Los resultados respectivos junto con los límites del intervalo de confianza del estadístico

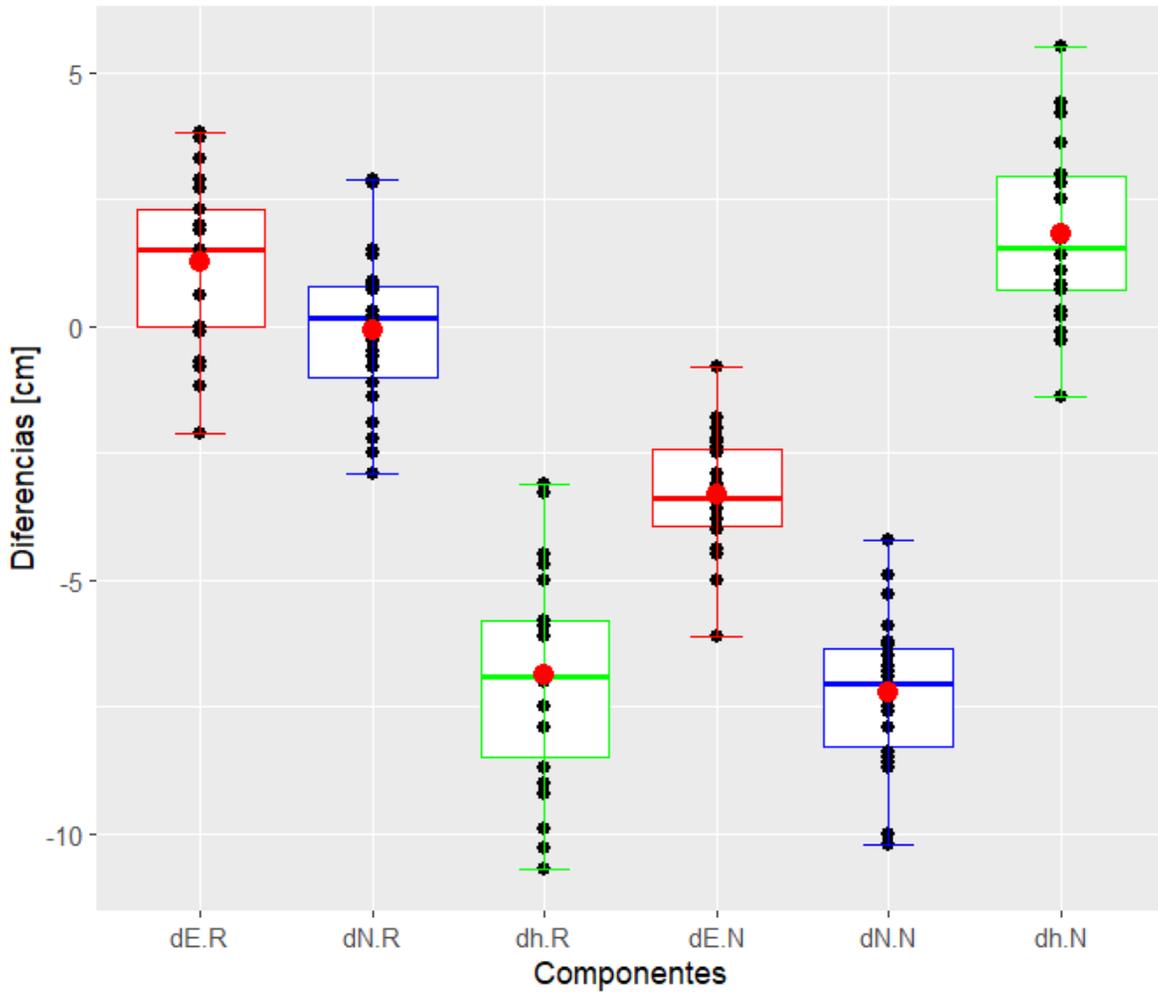


Figura 8: Conjunto de gráficos boxplot de las diferencias de coordenadas cartográficas y altura elipsoidal de los resultados RTK y NTRIP respecto de los resultados estáticos. Fuente: elaboración propia a partir del lenguaje R (R Core Team, 2024).

producto de la aplicación de la función “*t.test()*”, se muestran en la Tabla 8.

Tabla 8: Resultados de la prueba de comprobación de medias aplicada a pares vectores de diferencias de coordenadas cartográficas (R y N) y altura elipsoidal. Fuente: elaboración propia a partir de los resultados con el lenguaje R (R Core Team, 2024).

Parámetros de la función <i>t.test</i>	dE.R y dE.N	dN.R y dN.N	dh.R y dh.N
Estadístico <i>t</i>	10.724	16.045	-16.6250
<i>p</i> -valor	5.62E-10	2.92E-13	1.46E-13
Diferencia promedio	4.6045	7.1273	-8.6818
Límite inferior	3.7116	6.2035	-9.7678
Límite superior	5.4974	8.0511	-7.5958

Finalmente, se aplicó la prueba Shapiro-Wilks el cual contrasta la normalidad de una muestra cuando su tamaño es menor a 50. Esta prueba plantea como hipótesis nula H_0 que los datos provienen de una

distribución normal y como hipótesis alternativa H_1 que los datos no siguen una distribución normal. En ambiente R esta prueba se ejecuta con la función denominada “*shapiro.test()*”, cuyo resultado se expresa en términos del conocido p-valor (p-value) (R Core Team, 2024). En la Tabla 9 se presentan los resultados obtenidos para cada uno de los seis vectores diferencia considerando un nivel de significancia $\alpha = 5\%$.

Tabla 9: Resultados de la prueba de comprobación de normalidad Shapiro-Wilks aplicada a los vectores de diferencias de coordenadas cartográficas y altura elipsoidal. Fuente: elaboración propia a partir de los resultados del lenguaje R (R Core Team, 2024).

Parámetros de la función shapiro.test	dE.R	dN.R	dh.R	dE.N	dN.N	dh.N
Estadístico W	0,9670	0,9761	0,9706	0,9886	0,9822	0,9799
p-valor	0,6424	0,8456	0,7247	0,9941	0,9467	0,9147

3.4 Determinación de los vectores de desplazamiento

Una de las tareas usuales dentro de las labores de la ingeniería topográfica y geodésica consiste en la determinación del vector de desplazamiento entre pares de coordenadas asociadas a un mismo punto. Un vector es una magnitud física que tiene una magnitud y una dirección dentro de un determinado sistema de referencia. El resultado de este cálculo permite visualizar el movimiento relativo a uno de los puntos asumidos como fijo. Se tomaron como coordenadas de comparación las obtenidas de la metodología GNSS estática, por lo tanto, se calcularán los vectores de desplazamiento para los resultados R y N.

Con el objetivo de brindar una idea de la variación de los vectores de desplazamiento, se presenta en la Tabla 10 los valores mínimo y máximo de las componentes de magnitud y dirección, dada por el azimut cartográfico. En el caso de la componente vertical, los resultados se pueden consultar directamente en la Tabla 5, columnas 4 y 7 para diferencias R y N respectivamente.

Tabla 10: Valores mínimo y máximo de las componentes horizontales de los vectores de desplazamiento. Fuente: elaboración propia.

Vector	Distancia [cm]			Azimut [°]		
	Mínimo	Máximo	Promedio	Mínimo	Máximo	Promedio
RG	0.3	4.5	2.4	0.0	358.0	124.9
NG	5.7	11.9	8.0	211.8	265.6	242.7

En la Figura 9 se presentan en la parte superior los vectores de desplazamiento producto de las diferencias entre las soluciones vía radio y estáticas; mientras que en la parte inferior están los correspondientes vectores de desplazamiento entre las determinaciones vía NTRIP y estáticas. La componente vertical se presenta en la Figura 10 donde las flechas de color negro representan las diferencias de las soluciones con corrección vía radio y estáticas, y las de color naranja representan las diferencias de las soluciones con corrección vía NTRIP y estáticas.

4 Discusión

El campo de puntos definido por el levantamiento GNSS en la modalidad estática ofreció un patrón adecuado para realizar este estudio. La exactitud obtenida estuvo entre los 9 mm y los 15 mm (Espinoza *et*

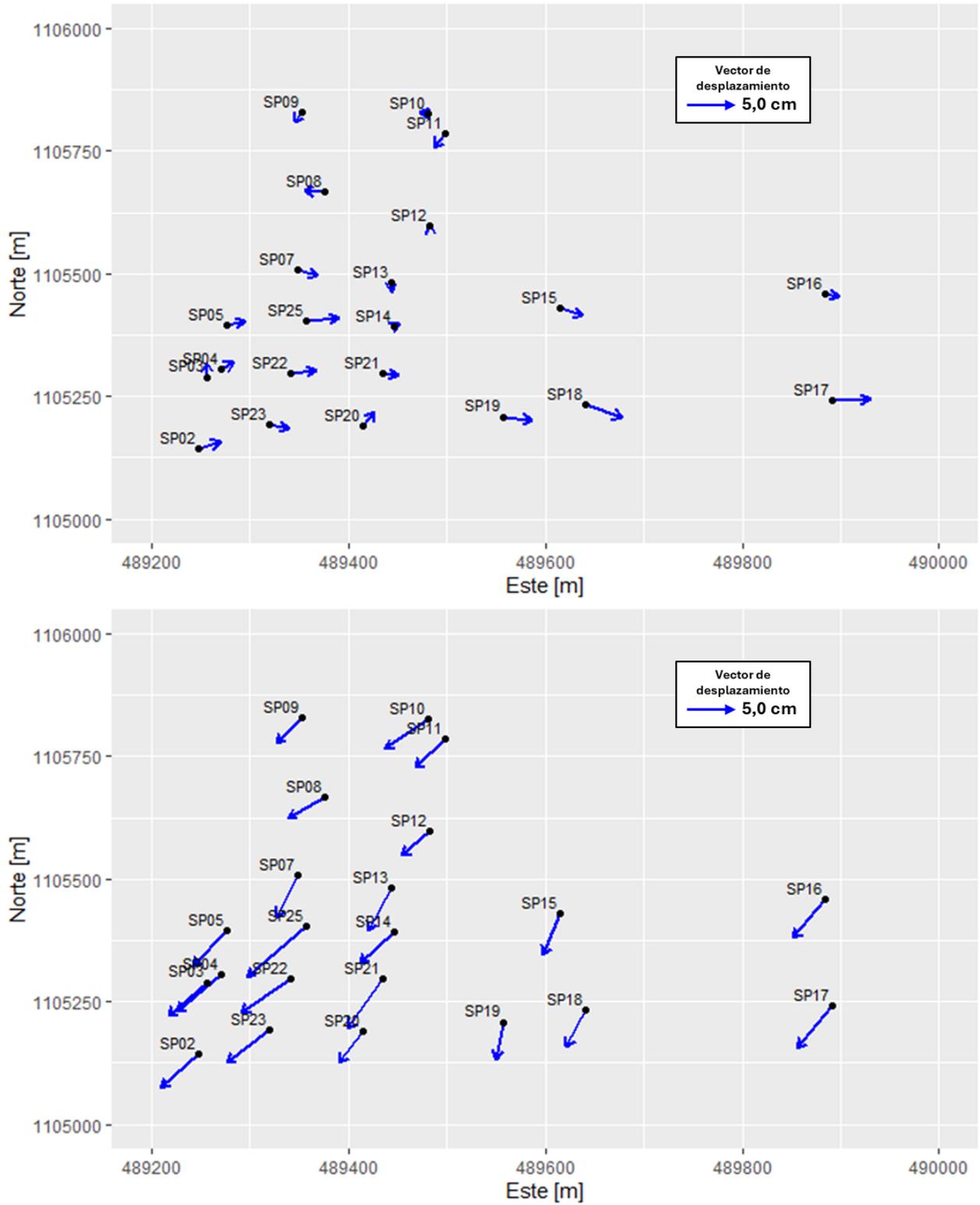


Figura 9: Vectores de desplazamiento producto de las diferencias de coordenadas cartográficas determinadas con corrección diferencial vía radio (superior) y NTRIP (inferior) respecto a la solución estática. Fuente: elaboración propia a partir de los resultados con el lenguaje R (R Core Team, 2024).

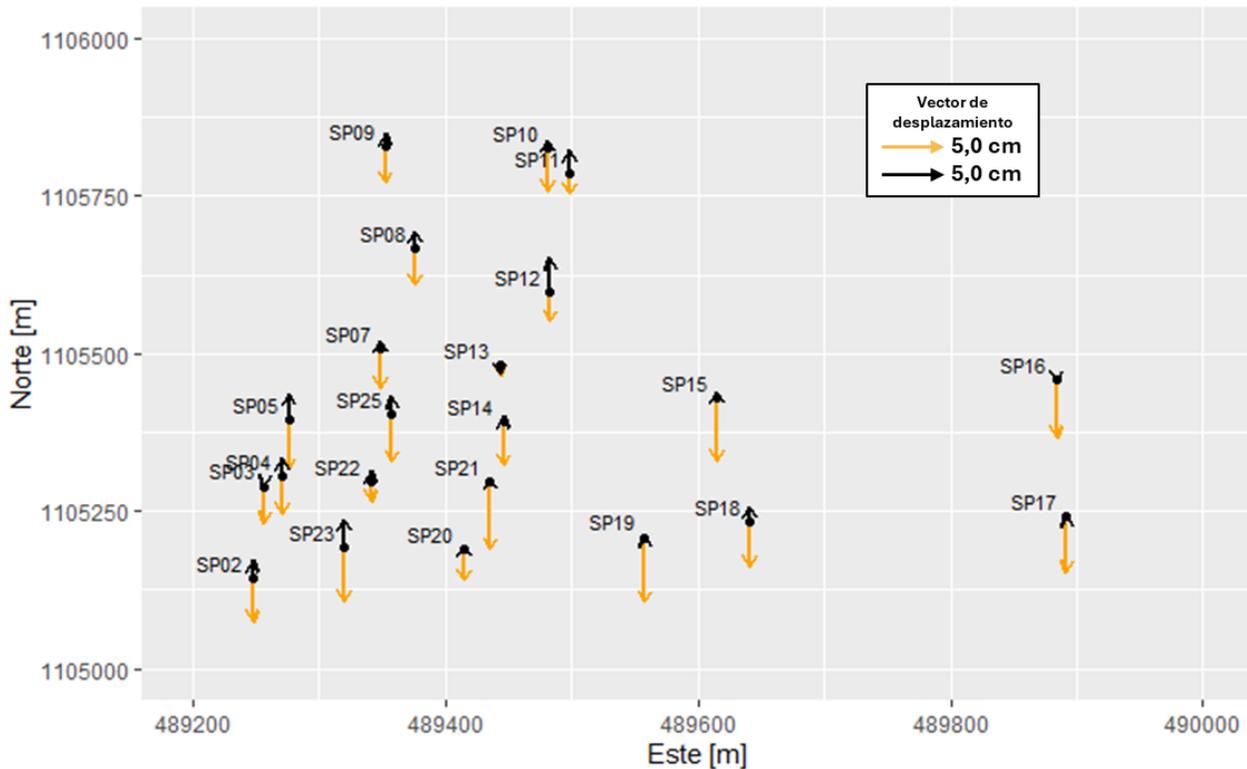


Figura 10: Vectores de desplazamiento vertical producto de las diferencias de coordenadas determinadas con corrección diferencial vía radio (superior) y NTRIP (inferior) respecto a la solución estática. Fuente: elaboración propia a partir de los resultados con el lenguaje R (R Core Team, 2024).

al., 2023). Este rango de exactitud es totalmente suficiente para servir de apoyo a prácticamente todo tipo de levantamientos topográficos y catastrales, así como también servir como apoyo a otras metodologías de captura de información.

Los cálculos estadísticos utilizados demostraron en primer lugar que los conjuntos de coordenadas cartográficas y de altura elipsoidal no presentan diferencias significativas en cuanto a sus varianzas como consecuencia de la prueba respectiva, cuyos valores se presentan en la Tabla 7, donde los p-valores demostraron que no se tiene suficiente evidencia estadística para descartar la hipótesis nula. Adicionalmente, los resultados obtenidos de la aplicación de la prueba de medias demostraron por medio de los p-valores presentados en la Tabla 8, que existe evidencia significativa para descartar la hipótesis nula, por lo tanto, los conjuntos de datos no tienen la misma media. Lo anterior también se pudo apreciar también revisando el boxplot de la Figura 8.

Los resultados en la ejecución del contraste de normalidad por medio de la prueba Shapiro-Wilks, confirmaron, por medio de los p-valores que no se tuvo suficiente evidencia para descartar la hipótesis nula, por lo tanto, los seis conjuntos de datos siguen una distribución normal. Gráficamente esta se puede apreciar también en la Figura 7 donde los Q-Q plots presentan una alineación donde los datos muestrales prácticamente siguen una línea recta.

El comportamiento de las diferencias de coordenadas por medio de los correspondientes vectores de desplazamiento se presenta en la Figura 9 para las componentes horizontales. En primer lugar, se nota como las magnitudes de los vectores para las diferencias RG son máximas de 4,5 cm (ver Tabla 10) con un azimut promedio en sentido de la dirección este franco. Por su parte, el comportamiento de los vectores

para las diferencias NG tienen magnitudes mayores con el caso extremo de casi 12 cm en un azimut 243° (ver Tabla 10). En esta Figura 9 se manejó la misma escala para mostrar gráficamente las magnitudes de los desplazamientos.

Se nota como en las diferencias RG hay una mejor consistencia entre las soluciones debido principalmente a la época de la referencia. Se debe recordar que este levantamiento utilizó correcciones vía radio, pero las coordenadas usadas como referencia para las mediciones, fueron las coordenadas estáticas del punto SP10, es decir, se trasladó todo el levantamiento a esta referencia temporal y espacial. En el caso de las diferencias NG, la situación es similar, solo que se aprecia que las diferencias son mayores (ver Tabla 5); sin embargo, llama la atención que prácticamente el azimut de los vectores tiene una dirección en sentido suroeste. Esto se debe a que la época de referencia de las bases GNSS para levantamientos NTRIP es 2019,24, con lo cual, las mediciones son trasladadas al pasado y al contar con coordenadas estáticas en una época más actualizada, se detecta en dichos cambios la influencia de la época de referencia y observación (Moya Zamora, 2022).

La componente vertical mostró un sistematismo claro (ver Tabla 5) lo cual gráficamente se aprecia en la Figura 10, en la cual se nota como los vectores de color naranja son claramente mayores que las flechas de color negro y con una dirección vertical negativa prioritariamente, lo cual quiere decir que producto del levantamiento con corrección vía radio, las alturas determinadas fueron en su mayoría menores que las dadas por las soluciones estáticas. La situación obtenida con las mediciones corregidas vía NTRIP brindaron resultados en las alturas elipsoídicas prácticamente levemente mayores en magnitud respecto a las soluciones estáticas.

5 Conclusiones

En Costa Rica las investigaciones de Irías y Valderrama (2019) y Espinoza *et al.* (2023) son prácticamente las primeras experiencias que han trabajado con datos provenientes de metodologías GNSS corregidas diferencialmente bajo la modalidad radio. No obstante, en este artículo se presenta una comparación entre las tres metodologías GNSS usadas por los profesionales costarricenses. De ahí que los resultados obtenidos representan un aporte en cuanto a la cuantificación de las diferencias entre dichas metodologías.

Los resultados obtenidos de este estudio aplicado bajo las condiciones e instrumental definido para el área de trabajo reflejaron que existen diferencias significativas en las coordenadas cartográficas y de altura elipsoídica determinadas por medio de mediciones GNSS en la modalidad RTK con correcciones diferenciales vía radio y vía NTRIP. Estas diferencias de coordenadas presentaron medias significativamente diferentes, pero con homocedasticidad, además se distribuyeron normalmente.

Las diferencias estuvieron en un rango de variación de entre 5 cm y 6 cm para los dos tipos de soluciones respecto de las coordenadas estáticas. Estas diferencias, debido a la alta exactitud de las coordenadas estáticas, son estadísticamente significativas. En la parte vertical el rango estuvo entre los 6,9 cm y 7,6 cm, sin embargo, como ya se mencionó, se obtuvo una alta consistencia en las soluciones derivadas de correcciones vía NTRIP.

Desde el punto de vista de la aplicación profesional práctica, ambas metodologías de corrección diferencial son métodos válidos, pues las diferencias, salvo otras fuentes de incertidumbre como aspectos físicos, lejanía de las estaciones base y otros propios del instrumental, dependerán de las coordenadas de referencia de las estaciones base. Si las coordenadas de las estaciones base del NTRIP se actualizaran en época y marco, las discrepancias se reducirían. Sin embargo, a efectos de generar legalidad a partir de los levantamientos topográficos, se demostró que, de momento, las discrepancias, por lo menos en la zona de

estudio catalogada como urbana, son suficientes para cumplir con las disposiciones de la Subdirección Catastral de Costa Rica.

6 Referencias

Berné Valero, J., Garrido Villén, N., y Capilla Romá, R. (2019). *GNSS: GPS, Galileo, Glonass, Beidou. Fundamentos y métodos de posicionamiento*. Editorial Universitat Politècnica de València. Disponible en: <https://riunet.upv.es/handle/10251/118522>.

Costa Rica (2017). *División territorial administrativa de la República de Costa Rica*. Imprenta Nacional de Costa Rica. ISBN: 978-9977-58-477-5.

Crustal Dynamics Data Information System (2023). CDDIS Data and Derived Products - GNSS - orbit products. Disponible en: https://cddis.nasa.gov/Data_and_Derived_Products/GNSS/orbit_products.html.

de la Garza, J., Morales Serrano, B. N., y González Cavazos, B. A. (2013). *Análisis estadístico multivariante: Un enfoque teórico y práctico*. McGraw Hill Interamericana. ISBN: 978-607-15-0817-1.

Espinoza, H., Flores, J., y Salazar, M. (2023). Densificación del Marco Geodésico Nacional CR-SRIGAS como insumo para la captura, la georreferenciación y la actualización de la información geoespacial en la zona urbana central del cantón de San Pablo de Heredia. Tesis de máster, Universidad Nacional de Costa Rica.

Flores, C. y Flores, K. (2021). Pruebas para comprobar la normalidad de datos en procesos productivos: Anderson-Darling, Ryan-Joiner, Shapiro-Wilk y Kolmogorov-Smirnov. *Societas. Revista de Ciencias Sociales y Humanísticas*, 23(2). Obtenido de: <https://portal.amelica.org/ameli/jatsRepo/341/3412237018/index.html>.

Gómez, M. (2016). *Elementos de Estadística Descriptiva*. EUNED. ISBN: 978-9968-48-240-0.

Hofmann-Wellenhof, B., Lichtenegger, H., y Wasle, E. (2007). *GNSS – Global Navigation Satellite Systems: GPS, GLONASS, Galileo and more*. Springer Vienna. ISBN: 978-3-211-73012-6.

Instituto Geográfico Nacional de Costa Rica (2022). Servicio ntrip caster del instituto geográfico nacional. Disponible en: <https://www.snitcr.go.cr/Noticias/detallenoticia2?id=bm90aWNpYTo6MTY3NTE5NTU5MQ==>.

Irías, R. y Valderrama, T. (2019). Metodología para la transmisión de datos gnss a través del ntrip para las estaciones de referencia de operación continua pertenecientes a la red geodésica nacional de referencia horizontal de costa rica. Tesis de máster, Universidad de Costa Rica. Disponible en: <https://repositorio.sibdi.ucr.ac.cr/items/eb4203c9-83dd-46d4-ac00-98d634e1ce78/full>.

Lee, I.-S. y Ge, L. (2006). The performance of RTK-GPS for surveying under challenging environmental conditions. *Earth, Planets and Space*, 58:515–522. doi: <https://doi.org/10.1186/BF03351948>.

Leick, A., Rapoport, L., y Tatarnikov, D. (2015). *GPS Satellite Surveying*. John Wiley & Sons, Ltd. ISBN: 978-1-118-67557-1.

- Luzuriaga Jaramillo, H. A., Espinosa Pinos, C. A., Haro Sarango, A. F., y Ortiz Román, H. D. (2023). Histograma y distribución normal: Shapiro-Wilk y Kolmogorov Smirnov aplicado en SPSS. *LATAM Revista Latinoamericana De Ciencias Sociales Y Humanidades*, 4(4):596–607. doi: <https://doi.org/10.56712/latam.v4i4.1242>.
- Mohd Razali, N. y Bee Wah, Y. (2011). Power comparisons of Shapiro-Wilk , Kolmogorov-Smirnov , Lilliefors and Anderson-Darling tests. *J. Stat. Model. Analytics*, 2:21–33.
- Moya Zamora, J. (2022). Procesamiento GNSS en el marco geodésico CR-SIRGAS: influencia de las épocas de observación y referencia. *Ingeniería*, 32(2):52–86.
- Moya Zamora, J., Bastos Gutiérrez, S., Ovares Sánchez, K., Murillo Arroyo, P., Menjívar Pérez, E., Céspedes Argüello, Y., y Sánchez, E. O. (2025). Consideraciones Técnicas en los Proceso de Georreferenciación dentro del Marco Geodésico Nacional CR-SIRGAS. *Revista Geografica de America Central*, 1(74):55–74.
- QGIS (2024). Spatial Without Compromise - QGIS WebSite. Disponible en <https://qgis.org/>.
- R Core Team (2024). The R Project for Statistical Computing. Disponible en: <https://www.R-project.org>.
- Roco-Videla, A., Landabur-Ayala, R., Maureira-Carsalade, N., y Olguin-Barraza, M. (2023). ¿Como determinar efectivamente si una serie de datos sigue una distribución normal cuando el tamaño muestral es pequeño? *Nutrición Hospitalaria*, 40(1):234 – 235. doi: <https://dx.doi.org/10.20960/nh.04519>.
- Romero Saldaña, M. (2016). Pruebas de bondad de ajuste a una distribución normal. *Revista Enfermería del Trabajo*, 6(3).
- Shapiro, S. S. y Wilk, M. B. (1965). An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples). *Biometrika*, 52(3/4):591–611. doi: <https://doi.org/10.2307/2333709>.
- SIRGAS (2024). Coordenadas de las estaciones SIRGAS-CON. Disponible en: <https://sirgas.ipgh.org/red-gnss/coordenadas/>.
- Soto-Rojas, C. (2022). Mapas interactivos: una herramienta para el análisis exploratorio de datos ético. *Revista Tecnología en Marcha*, 35(6):24–31. doi: <https://doi.org/10.18845/tm.v35i6.6232>.
- Superintendencia de Telecomunicaciones (2024). Informes FONATEL. Disponible en: <https://sutel.go.cr/fonatel/informes-fonatel>.
- Wallin, G. (2024). An introduction to R and Python for Data Analysis: A Side-by-Side Approach. *The American Statistician*, 78(2):265–265. doi: <https://doi.org/10.1080/00031305.2024.2320949>.
- Weber, G., Dettmering, D., y Gebhard, H. (2005). Networked Transport of RTCM via Internet Protocol (NTRIP). En Sansò, F., (Ed.), *A Window on the Future of Geodesy*, pp. 60–64. Springer Berlin Heidelberg. doi: https://doi.org/10.1007/3-540-27432-4_11.
- Wei, T. y Simko, V. (2021). corrplot: Visualization of a Correlation Matrix. R package version 0.92. Disponible en <https://CRAN.R-project.org/package=corrplot>.
- Wickham, H. (2016). *Ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. Springer Cham. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-24277-4>.