



# Sobre la determinación de cantidades conservadas en relatividad general de Einstein a partir de teorías de norma

## On the determination of conserved quantities in general relativity of Einstein from gauge theories

S.R. VÁSQUEZ<sup>1</sup>, BRYAN-O. LARIOS-LÓPEZ<sup>2,3</sup>

Recibido: 21 de julio de 2022 / Aceptado: 15 de agosto de 2022

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias, Universidad de Valladolid. [vsroberto.hn@gmail.com](mailto:vsroberto.hn@gmail.com)

<sup>2</sup>Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de Honduras,

<sup>3</sup>Mesoamerican Centre for Theoretical Physics, Universidad Autónoma de Chiapas, [bryan.larios@unah.edu.hn](mailto:bryan.larios@unah.edu.hn)

### RESUMEN

En los últimos 18 años en Física Fundamental se ha descubierto una dualidad inicialmente de naturaleza puramente cuántica entre ciertas teorías de gravedad y teorías de norma, la llamada doble copia o dualidad **Bern-Carrasco-Johansson** (BCJ). Sin embargo, recientemente se ha logrado implementar la doble copia a soluciones puramente clásicas. En este artículo aplicamos la doble copia clásica para calcular de manera novedosa y eficiente el tensor de energía-momento para las métricas del agujero negro de Schwarzschild y la del agujero negro de Reissner-Nordström.

### ABSTRACT

In the last two decades, it has been discovered a duality of purely quantum nature that relates to certain theories of gravity with gauge theories, the so-called double copy or **Bern-Carrasco-Johansson** (BCJ) duality. However, it has recently been possible to implement the double copy insights to purely classic solutions. In this article, the classical double copy is applied to calculate the energy-momentum tensor for the Schwarzschild black hole metric and the Reissner-Nordström black hole metric in a novel and efficient way.

### PALABRAS CLAVES

Doble copia, Kerr-Schild, agujero negro, tensor de energía-momento, campos de norma.

### KEYWORDS

Double copy, Kerr-Schild, black hole, energy-momentum tensor, gauge fields.

\* Esta obra está bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento - NoComercial 4.0 Internacional

\* This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

## I | INTRODUCCIÓN

La teoría cuántica de campos (TCC) ha sido uno de los dos pilares de la física moderna, convirtiéndose en una herramienta de cálculo muy precisa y versátil, sus mejores frutos se encuentran en la física de altas energías (Weinberg, 1995). Una realización ejemplar del tremendo poder de la TCC se ve materializada en el Modelo Estándar de partículas elementales (ME). En la actualidad, a criterio de expertos, el ME es nuestra mejor opción para describir las partículas elementales y sus interacciones (eg., Glashow, 1959; Salam y Ward, 1964; Weinberg, 1967). A pesar del enorme progreso del ME en aspectos tanto teóricos como experimentales (Tanabashi y cols., 2018), sabemos que dista de ser la versión completa de una teoría que describa el Universo desde sus constituyentes fundamentales. Posiblemente, la razón más fuerte (aunque no la única) se deba a que a pesar que el ME unifica a tres interacciones fundamentales de la naturaleza en un solo grupo de norma ( $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ), este no incorpora la interacción gravitacional. En otras palabras, el ME no incluye campos en su Lagrangiano final que al ser cuidadosamente cuantizados contengan los grados de libertad de la partícula mediadora de la interacción gravitacional, es decir, una partícula con espín-2 denominada “gravitón” (Zwiebach, 2004).

A escalas macroscópicas, la interacción gravitacional se estudia con la teoría de la relatividad general de Einstein (RG), la cual unifica la gravedad con la geometría. No hay ninguna duda que la RG ha permitido entender y describir acertadamente una enorme variedad de fenómenos clásicos en nuestro Universo (Carroll, 2019). Sin embargo, para describir la dinámica completa del cosmos es necesario agregar ingredientes adicionales como materia y energía oscura que la RG no contiene de forma natural (Peebles y Ratra, 2003). El candidato más viable para describir la materia oscura es una partícula de espín cero descrita por un campo escalar, conocida como Axionlike, para más detalles recomendamos revisar las siguientes referencias (Cedeño, González-Morales, y Ureña-López, 2017; Matos y Ureña-López, 2001).

A pesar de la aparente incompatibilidad entre la TCC y la RG, recientemente se puede encontrar una gran cantidad de literatura donde se examinan las relaciones entre algunas teorías cuánticas y la gravedad (eg., Bern, Carrasco, y Johansson, 2008b; Kawai, Lewellen, y Tye, 1985; B. Larios, 2019). Inicialmente, las relaciones surgieron con un enfoque puramente perturbativo, adecuado para el estudio de colisiones entre partículas elementales (Bern, Dixon, Dunbar, y Kosower, 1994, 1995; Bern, Dixon, y Kosower, 1998). Implementando un moderno formalismo (Diaz-Cruz y Larios, 2018; B. O. Larios, 2017; Parke y Taylor, 1986) que tiene como objetivo evaluar las amplitudes de dispersión de manera más eficiente en comparación al famoso método de Feynman (Peskin y Schroeder, 1995), fue posible evaluar amplitudes de dispersión que involucran 4 gravitones en función de una amplitud de dispersión de 4-gluones (ver la referencia Elvang y Huang, 2015 para más detalles). Hoy en día, gracias a los avances en la TCC, sabemos que las amplitudes en gravedad son una doble copia de amplitudes en teorías cuánticas de campos, o dicho de otra forma, *si calculamos las amplitudes con gluones, obtenemos gratuitamente las amplitudes con gravitones*. Esto presenta un avance significativo en la física y en la ciencia en general, y sin duda, cambia nuestros paradigmas de manera radical.

Con el objetivo de tener una mejor comprensión de la dualidad entre teorías de gravedad y teorías cuánticas de norma (TCN)(conocida como BCJ en honor a sus autores; ver Bern, Carrasco, y Johansson, 2010). En las referencias Monteiro, O’Connell, y D. White (2014), Luna, Monteiro, O’Connell, y White (2015), Luna, Monteiro, Nicholson, O’Connell, y White (2016) extendieron la dualidad a casos no perturbativos y puramente clásicos, lo que hace aun más amplio el abanico de aplicaciones de la dualidad, permitiendo entre tantas ventajas, re-calcular de manera económica y eficiente algunas

soluciones clásicas de las ecuaciones de campo de Einstein. Una pregunta interesante y todavía abierta es si se puede extender la dualidad a nivel de Lagrangianos (no solo amplitudes) y explorar si la dualidad permite encontrar más ejemplos de soluciones clásicas a la ecuaciones de campo de Einstein.

El orden del artículo es el siguiente: en la Sección II, presentamos algunos ingredientes necesarios para aplicar la dualidad entre teorías de gravedad y teorías de norma. Posteriormente, en la Sección III, se introduce la doble copia clásica, para luego aplicarla al agujero negro de Schwarzschild y estudiar la relación entre campos de norma ( $A_\mu$ ) y el gravitón ( $h_{\mu\nu}$ ). En la Sección IV, se aplica nuevamente la doble copia clásica para calcular el tensor energía-momento ( $T_{\mu\nu}$ ) asociado al agujero negro de Reissner-Nordström. Finalmente, presentamos nuestras conclusiones en la Sección V.

## II | PRELIMINARES

En esta sección, se introducen brevemente los fundamentos necesarios para aplicar la dualidad entre teorías de gravedad y las teorías de norma (Bern y cols., 2010). Es propicio mencionar que esta dualidad es inspirada en los resultados que se obtuvieron de cálculos perturbativos en teoría de cuerdas (Kawai y cols., 1985). La relación que se encontró se puede resumir de la siguiente forma; **amplitudes de dispersión de cuerdas cerradas es proporcional a una doble copia de amplitudes de dispersión de cuerdas abiertas**. Sin embargo, no tiene en principio ninguna motivación en la famosa correspondencia de Maldacena o dualidad AdS/CFT, donde se relaciona observables de una teoría cuántica de campos conformes en  $d$  dimensiones, con campos clásicos en un fondo curvo (AdS en este caso particular) en  $d + 1$  dimensiones (Maldacena, 1999).

### 1 | Kerr-Schild-Trautman ansatz

En RG es posible implementar un método para crear familias de soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein estudiando la propagación de las ondas gravitacionales (Trautman, 1962). Dicha propagación es posible si las componentes covariantes y contravariantes del tensor métrico dependen linealmente de las coordenadas modulo una función escalar. Desde 1965 se logró proponer un ansatz que permite encontrar de forma exitosa familias de soluciones a las ecuaciones de campo, es lo que se conoce como el ansatz Kerr-Schild (KS) (R. Kerr y Schild, 1965), (R. P. Kerr y Schild, 1965)<sup>1</sup>.

El ansatz KS se define de la siguiente forma<sup>2</sup>

$$g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu} + \kappa_N h_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu} + S k_\mu k_\nu, \quad \nu, \mu, \dots = 0, 1, \dots, d-1, \quad (1)$$

donde  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  puede ser la métrica de Minkowski [ $\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$ ] o bien un espacio curvo,  $S = \frac{\kappa_N^2}{2} \phi(x^\mu)$  es una función escalar sobre la cual se expande la perturbación,  $\kappa_N = \sqrt{16\pi G}$  es la constante Newtoniana y  $k^\mu$  es un 4-vector nulo que cumple las siguientes propiedades geodésicas

$$k_\mu \eta^{\mu\nu} k_\nu = k^2 = 0, \quad (2)$$

$$k^\mu \partial_\mu k_\nu = 0. \quad (3)$$

<sup>1</sup> Por el valioso trabajo realizado por Trautman, también es conocido como el ansatz de Kerr-Schild-Trautman

<sup>2</sup> En concordancia con la literatura de la [doble copia](#).

El hecho de que  $k^\mu$  cumpla con las propiedades antes mencionadas presenta las siguientes ventajas:

- La forma sencilla de la métrica inversa.

$$g^{\mu\nu} = \tilde{g}^{\mu\nu} - \kappa_N h^{\mu\nu}; \quad \det(g) = \det(\tilde{g}). \quad (4)$$

- La perturbación se describe en términos de un 4-vector nulo, esto representa un hecho simplificador y es demostrado en una parte de lo que resta de esta sección.

## 2 | Simplificando el tensor y escalar de Ricci

El formalismo de KS presenta varias ventajas prácticas. Por ejemplo, si se consideran las ecuaciones (1) y (4), se puede ver que al subir y bajar índices con una métrica plana (Minkowski), es equivalente a utilizar una métrica general. Si calculamos el tensor de Ricci considerando el ansatz KS, este toma la siguiente forma

$$R_\nu^\mu = \frac{1}{2} [\partial^\mu \partial_\alpha (\phi k^\alpha k_\nu) + \partial_\nu \partial^\alpha (\phi k_\alpha k^\mu) - \partial^2 (\phi k^\mu k_\nu)], \quad (5)$$

la contracción del tensor de Ricci ecuación (5) conduce al escalar de Ricci, es decir:

$$R = g_{\mu\nu} R_\mu^\nu = R_{\nu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu (\phi k^\mu k^\nu). \quad (6)$$

Si se consideran soluciones estacionarias, se tienen la condiciones  $\partial_0 \phi = 0$  y  $\partial_0 k_\mu = 0$ , también se define  $k^0 = 1$ , este término absorbe cualquier dependencia que  $k^0$  pudiera tener en  $\phi$ . Dado que  $k^2$  es cero, entonces es posible definir  $k^\mu$  de la siguiente forma:

$$k^\mu = (1, \hat{k}); \quad \hat{k} \text{ es un vector unitario.} \quad (7)$$

Luego, reemplazando  $k^\mu$  de esta última ecuación en la ecuación (5) y desarrollando las componentes del tensor de Ricci, se obtienen las siguientes expresiones:

$$R_0^\mu = -\frac{1}{2} \partial_\nu [\partial^\mu (\phi k^\nu) - \partial^\nu (\phi k^\mu)], \quad (8)$$

$$R_j^i = \frac{1}{2} \partial_l [\partial^i (\phi k^l k_j) + \partial_j (\phi k^l k^i) - \partial^l (\phi k^i k_j)]. \quad (9)$$

El ansatz KS permite obtener un tensor de Ricci lineal, de igual forma reduce las ecuaciones de Einstein a una sola relación entre la función  $\phi(x^\mu)$  y la fuente ( $k^\mu$ ). Para una revisión detallada del ansatz KS revisar la referencia Stephani, Kramer, MacCallum, Hoenselaers, y Herlt (2003).

## III | DOBLE COPIA CLÁSICA

En esta sección, presentamos varios casos donde la doble copia (DC) se realiza. En el régimen cuántico, la DC es una dualidad que permite calcular amplitudes de dispersión de gravitones (partículas de spín-2, mediadores de la interacción gravitacional) como el cuadrado de una amplitud de dispersión de gluones (partículas de spin-1, mediadores de la interacción fuerte), es decir  $\mathcal{A}_{\text{Gravedad}} = \mathcal{A}_{\text{YM}}^2$ . Existe mucha literatura interesante sobre los avances en esta línea de investigación en las referencias (Bern y cols., 2008b; Kawai y cols., 1985; B. Larios, 2020). Nuestro interés es aplicar la llamada doble copia

clásica para calcular métricas que son soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein en términos de campos vectoriales de una teoría de norma, como la electromagnética. En corto “*vamos a calcular métricas que son tensores de rango dos a partir de campos vectoriales con un solo índice vectorial*” (Monteiro y cols., 2014).

## 1 | Soluciones clásicas a partir de la doble copia

La doble copia clásica (DCC) se ha estudiado principalmente en la clase de métricas KS (Monteiro y cols., 2014), (Godoy, 2017). Dentro del contexto de la DCC, la métrica KS es llamada “la doble copia”, ya que esta contiene dos términos  $k^\mu$ . Al remover un  $k^\mu$ , se dice que quitamos una copia de los dos  $k^\mu$  y se puede construir lo que se conoce como “la copia individual”, la cual se asocia con un campo de norma que a la vez corresponde a un “gravitón” KS ( $h_{\mu\nu}$ ), en analogía a la dualidad BCJ para amplitudes de dispersión (Bern, Carrasco, y Johansson, 2008a). La copia individual del campo gravitacional es definida (Monteiro y cols., 2014) como sigue:

$$A_\mu = (C^a T_a) \phi k_\mu, \quad (10)$$

donde  $C^a T_a \in \mathfrak{g}$  es una constante de color arbitraria especificada por el factor  $C^a$  en la base  $T_a$  del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Cuando la métrica ( $g^{\mu\nu}$ ) tenga la forma KS (esté expresada en las coordenadas KS), el campo de norma ( $A_\mu$ ) está en capa de masa, es decir, es solución de las ecuaciones linealizadas de Yang-Mills (Peskin y Schroeder, 1995).

Para ilustrar el vínculo en DCC de las soluciones estacionarias del tensor de Ricci (ecuación (5)) con el formalismo KS y las ecuaciones de Yang-Mills se define primero un campo de norma abeliano, esto es como sigue

$$A_\mu = \phi k_\mu, \quad (11)$$

el cual es solución de la siguiente ecuación de movimiento

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (12)$$

donde  $J^\nu$  es la 4-corriente conservada ( $\partial_\nu J^\nu = 0$ ), y el tensor de Faraday ( $F^{\mu\nu}$ ) tiene la siguiente forma:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (13)$$

Utilizando el resultado de las ecuaciones (12) y (13), la componente  $R_0^\mu$  de la ecuación (8) toma la siguiente forma:

$$R_0^\mu = -\frac{1}{2} \partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} J^\mu. \quad (14)$$

La ecuación (14) es justamente la ecuación covariante (invariante bajo transformaciones de Lorentz) de Maxwell con fuente. Esta interesante relación (14) entre geometría y electromagnetismo permite interpretar la copia individual como el potencial vectorial ( $A^\mu$ ). Específicamente, la siguiente relación existe:

$$R_0^\mu - \frac{1}{2} R \delta_0^\mu = \frac{\kappa_N^2}{2} T_0^\mu. \quad (15)$$

La expresión (15) son las ecuaciones de campo de Einstein  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{\kappa_N^2}{2}T_{\mu\nu}$ , escritas con los índices cruzados del tensor de Ricci  $R_0^\mu$ . Considerando la relación entre  $R_0^\mu$  y la 4-corriente  $J^\mu$  de la ecuación (14), la ecuación (15) toma la siguiente forma:

$$-\frac{1}{2}J^\mu = \frac{\kappa_N^2}{2}T_0^\mu + \frac{1}{2}R\delta_0^\mu. \quad (16)$$

También es posible consolidar otra relación más, entre el tensor de Ricci (5) y la 4-corriente (14), a partir de las propiedades geodésicas que cumplen los 4-vectores  $k_\mu$  [ $k^0k_0 = -1, k^jk_0 = -\hat{k}, k^0k_i = \hat{k}, k^ik_j = \hat{k} \cdot \hat{k}$ ] es posible demostrar que se cumple la siguiente identidad:

$$R_\nu^\mu k^\nu k_\mu = 0, \quad (17)$$

expandiendo esta última relación y aplicando las relaciones que cumplen los 4-vectores  $k_\mu$  se obtiene:

$$R_j^i = -\frac{1}{2}J^0 + \vec{J} \cdot \hat{k}. \quad (18)$$

El resultado de la ecuación (16) nos permitirá construir tensores de energía-momento ( $T^{\mu\nu}$ ) para diferentes fondos curvos. Desde el punto de vista práctico, es justamente este enfoque que hace muy poderosa a la DCC, ya que en algunos casos calcular  $T^{\mu\nu}$  con métodos tradicionales es bastante laborioso y complicado (Misner y cols., 1973; Stephani y cols., 2003).

## 2 | Agujero negro de Schwarzschild

En esta sección aplicamos la DCC para el caso del agujero negro (AN) de Schwarzschild (Monteiro y cols., 2014). La métrica de Schwarzschild describe la geometría alrededor de un objeto compacto sin rotación (Schwarzschild, 1916):

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (19)$$

donde:  $f(r) = 1 - \psi(r) = 1 - \frac{r_s}{r}$ ,  $r_s = 2GM$  es el radio de Schwarzschild, “ $r$ ” es la coordenada radial ( $0 < r < \infty$ ) y  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$  es una métrica en una dos-esfera. En el límite débil, es posible utilizar la ecuación (19) para describir los objetos del sistema solar. Sin embargo, algunas aplicaciones astrofísicas requieren una generalización de esta solución (19) que permita describir objetos compactos como estrellas de neutrones o agujeros negros en rotación (R. P. Kerr, 1963).

Recurriendo a la DCC, nuestro objetivo es encontrar el potencial vectorial (campo de norma) asociado a la métrica de Schwarzschild (19). El punto de partida es hacer un cambio de base para expresar la ecuación (19) en coordenadas KS. Esto se logra con la siguiente transformación en la coordenada temporal:

$$t' = t - r_s \ln\left(\frac{r_s}{r} - 1\right), \quad (20)$$

Tenemos ahora la métrica (19) en coordenadas de Eddington-Finkelstein (Eddington, 1924; Finkelstein, 1958) como sigue

$$ds^2 = -[1 - \psi(r)]dt^2 + 2\psi(r)drdt + [1 + \psi(r)]dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (21)$$

Lo valioso de las coordenadas Eddington-Finkelstein es que permiten separar la parte plana del resto de información de la métrica, lo cual es apropiado para aplicar el ansatz KS. Con todo esto en cuenta, la métrica (21) toma la siguiente forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \psi(r)k_\mu dx^\mu k_\nu dx^\nu, \quad (22)$$

donde  $k_\mu = (-1, \hat{r})$  y  $k^\mu = (1, \hat{r})$  son 4-vectores tipo Kerr-Schild y obedecen a las propiedades descritas en las ecuaciones (2) y (3). Los términos de la función escalar  $\psi(r)$  pueden reescribirse para obtener la forma usual descrita en (1):

$$\psi(r) = \frac{r_s}{r} = \frac{2GM}{r}. \quad (23)$$

$$= \frac{\kappa_N^2}{2} \frac{M}{4\pi r}. \quad (24)$$

De RG sabemos que el campo clásico asociado al gravitón (después de cuantizar) es justamente  $h_{\mu\nu}$ , el cual según la ecuación (22) tiene la siguiente forma

$$h_{\mu\nu} = \frac{\kappa_N}{2} \phi k_\mu k_\nu, \quad (25)$$

donde  $\phi(r) = \frac{M}{4\pi r}$  es un campo escalar. La ecuación (25) relaciona gravedad con los campos de norma, como mostraremos más adelante utilizando la DCC.

Partiendo de la ecuación (25) podemos ver la DCC de manera pragmática. La idea es la siguiente: se construye la copia individual del gravitón, para ello se identifican las constantes de acoplamiento entre las dos teorías (gravedad-norma). Luego, se reemplaza la carga de gravedad (masa) por la correspondiente carga de color y se remueve uno de los cuadvectores  $k_\mu$  (Monteiro y cols., 2014). De manera esquemática, lo vemos como sigue

$$\frac{\kappa_N}{2} \rightarrow g, M \rightarrow Q, k_\mu k_\nu \rightarrow k_\mu, \frac{1}{4\pi r} \rightarrow \frac{1}{4\pi r}. \quad (26)$$

Los propagadores permanecen inalterados y finalmente la copia individual del gravitón queda:

$$A_\mu = \frac{gQ}{4\pi r} k_\mu, \quad (27)$$

de este modo, la copia individual del campo del gravitón (25) es el campo norma (27). La fuente de este campo es una carga estática situada en el origen.

### 3 | Tensor de energía-momento para el agujero negro de Schwarzschild

En la Subsección 2, se mostró como la DCC relaciona los grados de libertad del gravitón con los grados de libertad de un campo de norma para el AN de Schwarzschild. Sin embargo, en este trabajo todavía no hemos visto como calcular el tensor de energía momento de la ecuación de Einstein ( $G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$ ). El tensor de energía-momento para el AN de Schwarzschild (19), cuya fuente es una masa puntual y estática, se puede definir de la siguiente forma (Stephani y cols., 2003; Wald, 1984):

$$T^{\mu\nu} = M u^\mu u^\nu \delta^3(\vec{x}), \quad (28)$$

donde  $M$  es la masa estática y  $u^\mu$  es la 4-velocidad cuya expresión matemática es como sigue

$$u^\mu = (1, 0^j) = (1, 0, 0, 0). \quad (29)$$

Es una ventaja que en este caso la 4-velocidad ( $u^\mu$ ) presenta la misma estructura de los vectores  $k^\mu$  de la Subsección anterior, ya que esto permite aplicar naturalmente la DCC. Recurriendo entonces a la copia individual donde se reemplaza el campo vectorial de norma de la ecuación (27) en la ecuación covariante de Maxwell (12), obtenemos el siguiente resultado para la 4-corriente conservada

$$J^\mu = \partial_\nu F^{\mu\nu} = g\delta^3(\vec{r})Qu^\mu = g\delta^3(\vec{r})Q(1, 0^j). \quad (30)$$

A partir de la relación establecida en (16). Se pueden analizar la fuentes que aportan a la 4-corriente (30) asociada a la copia individual en Schwarzschild:

$$-\frac{1}{2}J^\mu = \frac{\kappa_N^2}{2} [-\delta^3(\vec{r})Mu^\mu] + R\delta_0^\mu \quad (31)$$

El escalar de curvatura  $R = 0$  se calcula a partir de (6). La única fuente que aporta a la 4-corriente es la fuente gravitacional del tensor energía-momento (28). La 4-corriente (31) queda ahora de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2}J^\mu = \frac{\kappa_N^2}{2}\delta^3(\vec{r})Mu^\mu \quad (32)$$

La única componente distinta de cero es  $J^0 = g\delta^3(\vec{r})Q$ :

$$\frac{g}{2}\delta^3(\vec{r})Q = \frac{\kappa_N^2}{2}\delta^3(\vec{r})M \quad (33)$$

Se puede observar en el resultado de la ecuación (30), que la 4-corriente conservada  $J^\nu$  es función de la 4-velocidad  $u^\nu$ . Esto permite identificar una relación tipo DC entre la 4-corriente (30) y el tensor de energía-momento (28), con una carga estática en una teoría de norma transmutándose en una masa estática en una teoría en gravedad, todo esto a través de un proceso digamos inverso de DCC. En otras palabras, podemos calcular el tensor de energía-momento con la DCC si consideramos lo siguiente (Godoy, 2017; Monteiro y cols., 2014)

$$g \rightarrow \kappa_N^2, \quad Q \rightarrow M, \quad u^\mu \rightarrow u^\mu u^\nu, \quad (34)$$

$$J^\mu u^\nu = \frac{\kappa_N^2}{2}\delta^3(\vec{r})Mu^\mu u^\nu = \frac{\kappa_N^2}{2}T^{\mu\nu}, \quad (35)$$

$$G^{\mu\nu} = J^\mu u^\nu. \quad (36)$$

Si se compara el enfoque de la DCC resumido en (34), con el método tradicional de relatividad general donde se tiene que conocer el Lagrangiano de materia acoplado a la gravedad y luego variando la acción de materia respecto a la métrica ( $T^{\mu\nu} = \sqrt{-\det(g)}\delta S_{\text{materia}}/\delta g_{\mu\nu}$ ), nos damos cuenta del poder y sencillez de la DCC para este tipo de cálculos tan importantes en gravitación y cosmología (Misner y cols., 1973; Wald, 1984).

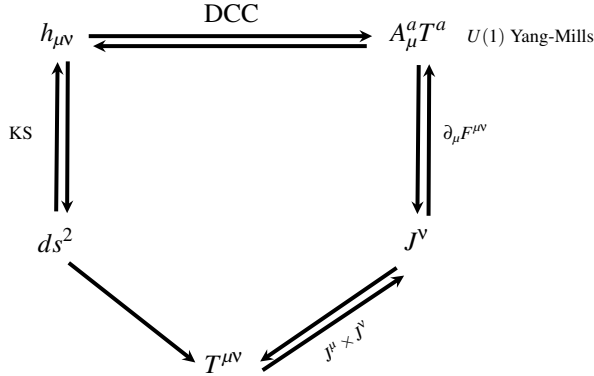


Figura 1: El diagrama muestra los pasos a seguir para obtener el tensor energía-momento para la métrica de Schwarzschild a través de la DCC. La trayectoria comienza en la métrica, por la dualidad entre teorías es posible volver en la trayectoria comenzando desde el tensor energía momento.

En el diagrama de la Figura 1, se muestra un esquema que ilustra el procedimiento para aplicar la DCC a un AN de Schwarzschild. Comenzando por la métrica en las coordenadas usuales ( $ds^2$ ), luego, aplicando una transformación de coordenadas KS que permite separar de la métrica plana ( $\eta_{\mu\nu}$ ) los grados de libertad del gravitón ( $\kappa_N h_{\mu\nu}$ ), los cuales contienen al campo escalar que a la vez tiene conexión con el tensor de energía-momento ( $T_{\mu\nu}$ ). Siempre en el contexto de la DCC, se realizan las sustituciones que se muestran en (26) y se conecta con la teoría de norma, electromagnetismo en este caso. Con el campo vectorial de norma ( $A_\mu$ ) a mano, podemos recurrir a las ecuaciones de Maxwell para obtener 4-corriente conservada. Finalmente, el tensor de energía-momento ( $T^{\mu\nu}$ ) se obtiene como una doble copia de la 4-corriente ( $J^\mu$ ).

#### IV | AGUJERO NEGRO DE REISSNER-NORDSTRÖM

En la Sección 3 se muestra como la DCC permite calcular de manera eficiente y novedosa el tensor de energía-momento para un AN de Schwarzschild. En esta Sección, extendemos el trabajo a casos donde la gravedad se encuentra acoplada a un campo electromagnético ( $A_\mu(\vec{x}, t)$ ), lo que permite estudiar casos con campos gravitacionales generados por un cuerpo de masa  $M$  con simetría esférica sin rotación aunque cargado. Podemos describir este escenario mediante la acción de Einstein-Maxwell (EM) (Stephani y cols., 2003):

$$S_{EM} = \frac{1}{\kappa_N^2} \int \sqrt{-g} (R - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) d^4x. \tag{37}$$

Por simplicidad lo que resta de esta sección la trabajaremos con  $8\pi G = 1$  como convención de unidades naturales.

La normalización del término de Maxwell en la ecuación (37) es tal que la fuerza de Coulomb entre dos cargas  $Q_1$  y  $Q_2$  pueden tratarse como dos cargas puntuales, cuando están separadas por una distancia  $r$

muy grande. Las ecuaciones de movimiento para la acción EM (37) son de la siguiente forma

$$G_{\mu\nu} = 2 \left( F_{\mu\lambda} F_{\nu}^{\lambda} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma} \right), \quad (38)$$

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = 0, \quad (39)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein (Misner y cols., 1973; Wald, 1984). Las ecuaciones (37) y (38) admiten la siguiente solución

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (40)$$

La métrica (40) es conocida como la métrica de Reissner-Nordström (RN) (Nordström, 1918; Reissner, 1916; Weyl, 1917). Para lo que sigue, es conveniente definir la siguientes funciones

$$g_{tt} = -1 + \phi(r) - \psi(r), \quad g_{rr} = -g_{tt}^{-1}, \quad (41)$$

donde  $\phi(r) = \frac{2M}{r}$  y  $\psi(r) = \frac{Q^2}{r^2}$  son funciones escalares asociadas a una fuente gravitacional y a las cargas eléctricas respectivamente, esto hace de la métrica (40) una descripción para un agujero negro cargado, de masa  $M$ , sin rotación y con simetría esférica, como se menciona al principio de esta Sección. Para poder aplicar la DCC a la métrica de la ecuación (40), es necesario expresarla en la forma KS. Al igual que en Schwarzschild (19), esto se logra transformando la coordenada temporal, con el elemento de línea definido por:

$$d\tau = dt - (1 + g_{tt}^{-1}) dr \quad (42)$$

La forma KS<sup>3</sup> para la métrica de RN (40) es como sigue:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \phi(r) k_{\mu} k_{\nu} + \psi(r) k_{\mu} k_{\nu}, \quad (43)$$

donde  $\eta_{\mu\nu}$  es la métrica de Minkowski y  $k_{\mu} = (-1, \hat{r})$  es un vector tipo KS. Para la métrica de la ecuación (43), el gravitón es una combinación del gravitón tipo Schwarzschild (25) más el término que contribuyen la parte electromagnética, como veremos en la siguiente Sección. El siguiente objetivo de este trabajo es aplicar la DCC para construir el tensor de energía-momento asociado a la métrica de la ecuación (40).

## 1 | La copia individual para el agujero negro de Reissner-Nordström

La métrica de la ecuación (43) se puede reescribir si reemplazamos las funciones escalares  $\phi(r)$  y  $\psi(r)$  como se muestra a continuación:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \Phi(r) k_{\mu} k_{\nu}, \quad (44)$$

donde la función  $\Phi(r)$  toma la siguiente forma:

$$\Phi(r) = \frac{2M_{RN}(r)}{r} = 2 \left( M - \frac{Q^2}{2r} \right) \frac{1}{r}. \quad (45)$$

<sup>3</sup>(43) se puede derivar de Kerr-Newman en la forma KS cuando el momento angular es cero.

$M_{RN}(r)$  es la masa a una posición  $r$  la cual es interpretada como la masa vista por un observador en el infinito ( $M$ ) menos la masa-energía del campo eléctrico ( $E = \frac{Q}{r^2}$ ) en el horizonte exterior del agujero negro descrito por la métrica de RN (40) (Hamilton, 19 de abril de 2001).

Teniendo la métrica del AN de RN en la forma KS (44), es posible aplicar la DCC para los grados de libertad del gravitón de la ecuación (43), dicho de otra manera, la DCC nos permite expresar  $h_{\mu\nu}$  de tal forma que se identifique la copia individual, esto es como sigue

$$h_{\mu\nu} = \Phi k_\mu k_\nu, \quad (46)$$

donde la función escalar  $\Phi$  definida en (45), de manera más explícita, tiene la siguiente forma

$$\Phi = \phi(r) + \psi(r) = \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}. \quad (47)$$

En la Figura 2, se muestra el comportamiento de las funciones escalares de la ecuación (47). El análisis numérico se realiza arbitrariamente para diferentes valores de la carga ( $Q$ ) y la masa ( $M$ ) de un agujero negro de origen estelar con rangos de masa que incluyen AN's tipo XTE J1650-500 (Shaposhnikov y Titarchuk, 2009).

La copia individual del gravitón (46), al igual que en la Subsección 2, es la que nos relaciona con el campo vectorial de la teoría de norma, “*se dice que el campo vectorial de norma es la copia individual del gravitón, o bien que el gravitón es la doble copia del campo de norma*”. En este caso, la copia individual es la siguiente<sup>4</sup>

$$A_\mu = \left( Q - \frac{Q^2}{r} \right) \frac{1}{r} k_\mu. \quad (48)$$

El vector de norma  $A_\mu$  es la suma de dos términos, el primero representa la copia individual para el caso del AN de Schwarzschild (19), donde se transmutó la fuente gravitacional a una fuente electrostática. El segundo término en la ecuación (48) no incluye fuentes gravitacionales, pero si la carga eléctrica (Carrillo-Gonzalez, Penco, y Trodden, 2017; Monteiro y cols., 2014). La elección de una copia individual de manera que pueda ser solución a las ecuaciones de Maxwell, en parte esta justificada por la siguiente condición (Newman, 2004):

$$F_{\mu\nu} k^\nu = \lambda k_\mu \quad (49)$$

Entonces, para asociar la copia individual con los  $k^\mu$  y con soluciones de Maxwell, los eigen-vectores,  $k^\mu$ , deben ser vectores tangentes a una congruencia geodésica nula, divergentes y libre de cizallamiento (shear-free).

Estas condiciones para los vectores propios  $k^\mu$ , son cumplidas por los 4-vectores KS en (2) y (3).

<sup>4</sup> El vector de norma  $A_\mu$  para RN se puede encontrar en la referencia Bah, Dempsey, y Weck (2020), aunque únicamente se considera para el caso  $M = 0$

Para la copia individual (48) se verifica que:

$$F_{0\nu}k^\nu = (-\partial_{\hat{r}}A_0) \cdot \hat{r} \quad (50)$$

$$F_{i\nu}k^\nu = \partial_{\hat{r}}A_0 \quad (51)$$

Con ello entonces, el valor propio  $\lambda$  que permite la relación (49) es como sigue:

$$\lambda = k^\nu \partial_{\nu}A_0 \quad (52)$$

De manera entonces, que la copia individual (48) posee un vector propio que cumple la relación (49) y por lo tanto es solución a las ecuaciones de Maxwell.

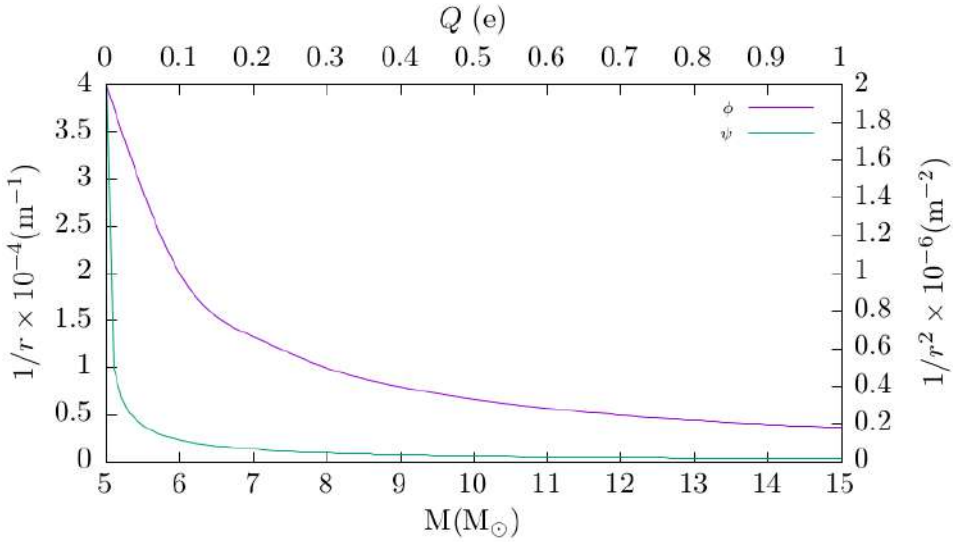


Figura 2: Gráfica de los campos escalares de la ecuación (47) para el rango de masa  $5 \leq M \leq 15 M_{\odot}$ . La carga  $Q$  toma los siguientes valores  $0 \leq Q \leq 1 e$ , donde  $M_{\odot}$  es la masa del Sol, y  $e$  es la carga del electrón.

## 2 | Tensor de energía-momento para el agujero negro de Reissner-Nordström

En esta parte del artículo, aplicamos la DCC para recalculer el tensor de energía-momento total ( $T'_{\mu\nu}$ ) del AN de RN (40). De relatividad general sabemos que las fuentes (masa y carga eléctrica) de este AN generan el siguiente tensor energía-momento (Misner y cols., 1973; Stephani y cols., 2003; Wald, 1984)

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^f + T_{\mu\nu}^e, \quad (53)$$

donde los tensores  $T_{\mu\nu}^f$  y  $T_{\mu\nu}^e$  están definidos como sigue

$$T_{\mu\nu}^f = (\rho + p)u_{\mu}u_{\nu} + pg_{\mu\nu}, \quad (54)$$

$\rho$  es la densidad de materia,  $p$  es la presión y  $u^{\mu}$  es la 4-velocidad.

$$T_{\mu\nu}^e = F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \quad (55)$$

Como se menciono en la Sección anterior, calcular  $T_{\mu\nu}^t$  con los métodos convencionales de relatividad general puede resultar un trabajo bastante laborioso, esto incluso implementando herramientas de cálculo simbólico. Sin embargo, en el contexto de la DCC, el tensor  $T_{\mu\nu}^t$  se puede calcular de manera muy practica y eficiente utilizando la copia individual (48) para posteriormente calcular la 4-corriente conservada ( $J^\mu$ ) a la Maxwell, esto es como sigue

$$J^\mu = \partial_\nu F^{\mu\nu} = 4\pi Q \delta^3(\vec{r}) u^\mu + \frac{2Q^2}{r^4} u^\mu \quad (56)$$

El resultado de la ecuación (56) es la 4-corriente  $J^\mu$  asociada a las fuentes puntuales que producen el campo de norma (48). La 4-velocidad  $u^\mu$  tiene solo componente temporal; de la relación encontrada en (16) para la 4-corriente se sigue que:

$$T_0^{t\mu} = -2\pi Q \delta^3(\vec{r}) u^\mu - \frac{Q^2}{r^4} u^\mu - \frac{1}{2} R \delta_0^\mu \quad (57)$$

A partir de esta ultima expresión se pueden identificar las cantidades gravitacionales de (54) con  $p = 0$  y las cantidades electromagnéticas de (55):

$$T_0^{t\mu} = \rho u^\mu + U_{em} u^\mu = -2\pi Q \delta^3(\vec{r}) u^\mu - \frac{Q^2}{r^4} u^\mu \quad (58)$$

El término  $\rho$  de la densidad de materia esta relacionado con el término  $Q \delta^3(\vec{r})$ , el termino que corresponde a la energía electromagnética  $U_{em}$  está relacionado con el término  $\frac{Q^2}{r^4}$ . La correspondencia de doble copia, como el gravitón de RN (46) y el campo de norma (48) permite identificar las fuentes que aportan en una teoría  $U(1)$  de Yang-Mills y que al transformar estas fuentes del sector  $U(1)$ , por un proceso de doble copia hacia el sector de gravedad, se identifican como fuentes que aportan a cantidades conservadas en gravedad. Para aclarar más estos comentarios, a continuación calculamos la relación que hay entre las fuentes de la 4-corriente (56) y las fuentes del tensor energía-momento para el AN de RN en (53).

Con la siguiente relación establecida en (57) con  $R = 0$ :

$$\frac{1}{2} J^\mu = -T_0^{t\mu}, \quad (59)$$

sin perdida de generalidad es posible reescribirla en términos de la 4-velocidad  $u^\mu$ , de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2} J^\mu = -u^\alpha T_\alpha^{t\mu}, \quad (60)$$

$$\frac{1}{2} J^\mu u^\nu = -u^\alpha u^\nu T_\alpha^{t\mu}. \quad (61)$$

El lado derecho de esta ultima expresión representa el tensor de energía momento para el AN de RN (53), el cual puede ser obtenido aplicando un proceso inverso de doble copia a la 4-corriente (56), específicamente esto es como sigue:

$$J^\mu = 4\pi Q \delta^3(\vec{r}) u^\mu + \frac{2Q^2}{r^4} u^\mu \xrightarrow[u^\mu \rightarrow u^\mu u^\nu]{Q \rightarrow 2M} \rho u^\mu u^\nu + U_{em} u^\mu u^\nu = T^{t\mu\nu}, \quad (62)$$

los dos términos de  $T^{\mu\nu}$  están en correspondencia con:

$$T^{f\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu = 4\pi M \delta^3(\vec{r}) u^\mu u^\nu \text{ para (54) y } T^{e\mu\nu} = U_{\text{em}} u^\mu u^\nu = \frac{Q^2}{r^4} u^\mu u^\nu \text{ para (55).} \quad (63)$$

## V | CONCLUSIONES

Utilizando la doble copia clásica, hemos recalculado el tensor de energía-momento para la métrica del agujero negro de Schwarzschild. Nuestro resultado coincide con el existente en la literatura. Además, siempre en el contexto de la DCC, se calculó el tensor de energía-momento para el agujero negro de Reissner-Nordström. Consideramos que este resultado es la principal contribución de este trabajo. Como se mencionó en el cuerpo del artículo, la doble copia es una novedosa y potente dualidad que inicialmente surgió para relacionar amplitudes de probabilidad de gravitones con amplitudes de gluones. Sin embargo, la dualidad es tan sorprendente que incluso puede ser aplicada para calcular el tensor  $T^{\mu\nu}$  a partir de la 4-corriente  $J^\mu$  en una gran variedad de casos. Lo increíble se debe a que recuperamos toda la información de  $T^{\mu\nu}$  con tan solo conocer el campo de norma  $A^\mu$  (o copia individual del gravitón). En otras palabras, con la DCC únicamente tenemos que calcular las ecuaciones de Maxwell para obtener cantidades físicas que antes se calculaban con relatividad general y/o geometría diferencial.

Es propicio mencionar que la DCC incluso está siendo utilizada para cálculos de alta precisión necesarios para los experimentos de LIGO y VIRGO (Abramovici y cols., 1992; Acernese y cols., 2006). En realidad la comunidad de Amplitudes, específicamente la que está trabajando en la doble copia lleva varios frentes, como ser: probar que la gravedad es renormalizable a todos los niveles, dualidades perturbativas y no perturbativas entre teorías de gravedad y teorías de norma, ondas gravitacionales, nuevas conexiones de la física con la matemática (geometría algebraica, geometría tropical, entre muchas otras), descripción cuántica de la gravedad en el régimen infrarrojo y ultravioleta, y sin duda muchas otras áreas no menos fascinantes que las aquí mencionadas. Se puede consultar (Bern, Carrasco, Chiodaroli, Johansson, y Roiban, 2019) para más información de la doble copia y sus aplicaciones.

## VI | AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Facultad de Ciencias Espaciales (FACES) por la invitación a la ponencia de este trabajo en el Primer Congreso de Investigación de Ciencias Espaciales. BL agradece al International Centre for Theoretical Physics (ICTP) por la invitación a Trieste, donde parte de este trabajo fue realizado.

## I | REFERENCIAS

- Abramovici, A., Althouse, W. E., Drever, R. W. P., Gürsel, Y., Kawamura, S., Raab, F. J., ... Zucker, M. E. (1992). Ligo: The laser interferometer gravitational-wave observatory. *Science*, 256(5055), 325–333. Descargado de <https://science.sciencemag.org/content/256/5055/325> doi:
- Acernese, F., Amico, P., Alshourbagy, M., Antonucci, F., Aoudia, S., y *et al.*, S. A. (2006, sep). The virgo status. *Classical and Quantum Gravity*, 23(19), S635–S642. Descargado de <https://doi.org/10.1088%2F0264-9381%2F23%2F19%2Fs01> doi:
- Bah, I., Dempsey, R., y Weck, P. (2020). Kerr-Schild double copy and complex worldlines. *JHEP*, 20, 180. doi:
- Bern, Z., Carrasco, J. J., Chiodaroli, M., Johansson, H., y Roiban, R. (2019). *The duality between color and kinematics and its applications*.
- Bern, Z., Carrasco, J. J. M., y Johansson, H. (2008a). New relations for gauge-theory amplitudes. *Phys. Rev.*, D78, 085011. doi:

- Bern, Z., Carrasco, J. J. M., y Johansson, H. (2008b, Oct). New relations for gauge-theory amplitudes. *Phys. Rev. D*, 78, 085011. Descargado de <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.085011> doi:
- Bern, Z., Carrasco, J. J. M., y Johansson, H. (2010). Perturbative quantum gravity as a double copy of gauge theory. *Phys. Rev. Lett.*, 105, 061602. doi:
- Bern, Z., Dixon, L., Dunbar, D. C., y Kosower, D. A. (1994). One-loop n-point gauge theory amplitudes, unitarity and collinear limits. *Nuclear Physics B*, 425(1), 217 - 260. Descargado de <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321394901791> doi:
- Bern, Z., Dixon, L., Dunbar, D. C., y Kosower, D. A. (1995). Fusing gauge theory tree amplitudes into loop amplitudes. *Nuclear Physics B*, 435(1), 59 - 101. Descargado de <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139400488Z> doi:
- Bern, Z., Dixon, L., y Kosower, D. A. (1998). One-loop amplitudes for  $e^+e^-$  to four partons. *Nuclear Physics B*, 513(1), 3 - 86. Descargado de <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321397007037> doi:
- Carrillo-Gonzalez, M., Penco, R., y Trodden, M. (2017). *The classical double copy in maximally symmetric spacetimes*.
- Carroll, S. M. (2019). *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. Cambridge University Press. doi:
- Cedeño, F. X. L., González-Morales, A. X., y Ureña-López, L. A. (2017, Septiembre). Cosmological signatures of ultralight dark matter with an axionlike potential. *Physical Review D*, 96, 061301. Descargado de <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.96.061301> doi:
- Diaz-Cruz, J. L., y Larios, B. O. (2018). Helicity amplitudes for massive gravitinos in N=1 supergravity. *J. Phys.*, G45(1), 015002. doi:
- Eddington, A. (1924, Febrero). A comparison of whitehead's and einstein's formulæ. *Nature*, 113, 965-967. Descargado de <https://doi.org/10.1038/113192a0> doi:
- Elvang, H., y Huang, Y.-t. (2015). *Scattering amplitudes in gauge theory and gravity*. Cambridge University Press. doi:
- Finkelstein, D. (1958, Mayo). Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle. *Phys. Rev.*, 110, 965-967. Descargado de <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.110.965> doi:
- Glashow, S. L. (1959). The renormalizability of vector meson interactions. *Nucl. Phys.*, 10, 107-117. doi:
- Godoy, A. L. (2017). *Double copy and classical solutions*. Glasgow:University of Glasgow.
- Hamilton, A. J. S. (19 de abril de 2001). Obtenido de <https://jila.colorado.edu/~ajsh/bh/rn.html>.
- Kawai, H., Lewellen, D., y Tye, S. (1985). A relation between tree amplitudes of closed and open strings. *Nuclear Physics B*, 23. doi:
- Kerr, R., y Schild, A. (1965). A new class of vacuum solutions of the einstein field equations. En (p. 222). *Atti del convegno sulla relatività generale; problemi dell' energia e ondi gravitazionali*. Descargado de <https://doi.org/10.1007/s10714-009-0857-z> doi:
- Kerr, R. P. (1963, 09). Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.*, 11, 237-238. Descargado de <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.11.237> doi:
- Kerr, R. P., y Schild, A. (1965). Some algebraically degenerate solutions of einstein's gravitational field equations. En *Proc. symp. appl. math* (Vol. 17, p. 199).
- Larios, B. (2019, jun.). Sobre las nuevas relaciones entre gravedad y la teoría cuántica de campos. *Revista de la Escuela de Física*, 7(1), 16-26. <https://www.camjol.info/index.php/fisica/article/view/8260>. doi:
- Larios, B. (2020). (Daniel Amaya, Bryan Larios y Lorenzo Diaz-Cruz por aparecer)
- Larios, B. O. (2017). Helicity amplitudes for production of massive gravitino/oldstino. *J. Phys. Conf. Ser.*, 912(1), 012012. doi:
- Luna, A., Monteiro, R., Nicholson, I., O'Connell, D., y White, C. D. (2016). The double copy: bremsstrahlung and accelerating black holes. *JHEP*, 06, 023. doi:
- Luna, A., Monteiro, R., O'Connell, D., y White, C. D. (2015). The classical double copy for Taub-NUT spacetime. *Phys. Lett.*, B750, 272-277. doi:
- Maldacena, J. M. (1999). The large n limit of superconformal field theories and supergravity. *Int. J. Theor. Phys.*, 38, 1113-1133. (Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)) doi:
- Matos, T., y Ureña-López, L. A. (2001, Febrero). Further analysis of a cosmological model with quintessence

- and scalar dark matter. *Physical Review D*, 63, 063506. Descargado de <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.63.063506> doi:
- Misner, C., John Archibald Wheeler, C., Misner, U., Thorne, K., Wheeler, J., Freeman, W., y Company. (1973). *Gravitation* (n.º parte 3). W. H. Freeman. Descargado de <https://books.google.hn/books?id=w4Gigq3tY1kC>
- Monteiro, R., O'Connell, D., y D. White, C. (2014). Black holes and the double copy. *Springer*, 22. doi:
- Newman, E. T. (2004, Jun). Maxwell fields and shear-free null geodesic congruences. *Classical and Quantum Gravity*, 21(13), 3197–3221. Descargado de <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/21/13/007> doi:
- Nordström, G. (1918, enero). On the energy of the gravitation field in Einstein's theory. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences*, 20, 1238-1245.
- Parke, S. J., y Taylor, T. R. (1986, Jun). Amplitude for  $n$ -gluon scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 56, 2459–2460. Descargado de <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.56.2459> doi:
- Peebles, P. J. E., y Ratra, B. (2003, Abril). The cosmological constant and dark energy. *Rev. Mod. Phys.*, 75, 559–606. Descargado de <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.75.559> doi:
- Peskin, M., y Schroeder, D. (1995). *An introduction to quantum field theory*. Avalon Publishing. Descargado de <https://books.google.hn/books?id=EVeNNcslvX0C>
- Reissner, H. (1916). Über die eigengravitation des elektrischen felde nach der einsteinschen theorie. *Annalen der Physik*, 355(9), 106-120. Descargado de <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19163550905> doi:
- Salam, A., y Ward, J. (1964). Electromagnetic and weak interactions. *Physics Letters*, 13(2), 168 - 171. Descargado de <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0031916364907115> doi:
- Schwarzschild, K. (1916, 01). über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie. En (Vol. K1, p. 449-456). Berlin:Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin. doi:
- Shaposhnikov, N., y Titarchuk, L. (2009, jun). Determination of black hole masses in galactic black hole binaries using scaling of spectral and variability characteristics. *The Astrophysical Journal*, 699(1), 453–468. Descargado de <https://doi.org/10.1088%2F0004-637x%2F699%2F1%2F453> doi:
- Stephani, H., Kramer, D., MacCallum, M. A., Hoenselaers, C., y Herlt, E. (2003). *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge: Cambridge Univ. Press. Descargado de <http://www.cambridge.org/uk/catalogue/catalogue.asp?isbn=0521461367> doi:
- Tanabashi, M., Hagiwara, K., Hikasa, K., Nakamura, K., Sumino, Y., y otros. (2018). Review of particle physics. *Phys. Rev. D*, 98(3), 030001. doi:
- Trautman, A. (1962). On the propagation of information by waves. En *Recent developments in general relativity*. (p. 459). Warsaw: Polish Scientific Publishers.
- Wald, R. (1984). *General relativity*. University of Chicago Press. Descargado de <https://books.google.hn/books?id=ibSdQgAACAAJ>
- Weinberg, S. (1967, Nov). A model of leptons. *Phys. Rev. Lett.*, 19, 1264–1266. Descargado de <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.19.1264> doi:
- Weinberg, S. (1995). *The quantum theory of fields* (Vol. 1). Cambridge University Press. doi:
- Weyl, H. (1917). Zur gravitationstheorie. *Annalen der Physik*, 359(18), 117-145. Descargado de <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19173591804> doi:
- Zwiebach, B. (2004). *A first course in string theory*. Cambridge University Press. Descargado de <https://books.google.hn/books?id=XmsbvPluUeIC>